DM de calcul

À rendre le 14 septembre

On justifiera toutes les étapes du calcul ; une réponse non justifiée sera ignorée. La calculatrice est fortement déconseillée.

Question 1

Simplifier les termes suivants au maximum :

$$a)\ \frac{55-22}{55+22}, \qquad b)\ \frac{1}{16}-\frac{1}{20}, \qquad c)\ \sqrt{80}-\sqrt{5}, \qquad d)\ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$e)\ \frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}, \qquad f)\ \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}, \qquad g)\ \frac{x^2+2xy+y^2}{x^4-y^4}, \qquad h)\ \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$$

$$i)\ e^{-\ln(x^2)}, \qquad j)\ (2e)^{\ln x}, \qquad k)\ \ln 4+\ln 15+\ln 42-\ln 2-\ln 70-\ln 9$$

Question 2

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2-5x+4=0$
2. $\sqrt{2x+3}=x+2$
3. $\frac{2}{x}+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x}{3}}$
4. $7x^3-3x^2+6x^4=0$
5. $3(3x+1)^2-16x^2=0$ *(Indice: utiliser une identité remarquable.)*
6. $x^3+7x^2-17x+9=0$ *(Indice: chercher une solution évidente.)*
7. $3e^{2x}+4e^x-1=0$ *(Indice: poser $X=e^x$.)*

Correction de la question 1

a) On a $55-22 = 11\times(5-2)$ et $55+22 = 11\times(5+2)$; en simplifiant par 11 la fraction devient $\frac{5-2}{5+2} = \frac{3}{7}$.

b) On a $16 = 4\times 4$ et $20 = 4\times 5$; on choisit alors le dénominateur commun $4\times 4\times 5$, c'est-à-dire 80. On a alors $\frac{1}{16} - \frac{1}{20} = \frac{5}{80} - \frac{4}{80} = \frac{1}{80}$.

c) On a $80 = 16\times 5$ donc $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ et $\sqrt{80} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

d) On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} \\
&= \frac{5+2-2\sqrt{10}+5+2+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2} \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

e) Par analogie avec la question précédente on multiplie en haut et en bas par $1+\sqrt{3}$ (quantité conjuguée) :

$$\begin{aligned}
\frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} &= \frac{(3+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{1^2 - \sqrt{3}^3} \\
&= \frac{3+3\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{-2} \\
&= -(3+2\sqrt{3})
\end{aligned}$$

f) On multiplie en haut et en bas des fractions pour faire disparaître les doubles fractions :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}} &= \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}} \\
&= \frac{1}{\frac{x-1-x^2}{x(x-1)}} \\
&= \frac{x^2-x}{x-x^2-1}
\end{aligned}$$

g) On a

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2xy+y^2}{x^4-y^4} &= \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} \\
&= \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{x+y}{(x^2+y^2)(x-y)}
\end{aligned}$$

h) On a

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1} = e^x+1$$

i) On a

$$\begin{aligned} e^{-\ln(x^2)} &= \frac{1}{e^{\ln(x^2)}} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

j) On a

$$\begin{aligned} (2e)^{\ln x} &= 2^{\ln x} e^{\ln x} \\ &= e^{\ln(2)\ln x} \times x \\ &= x^{1+\ln(2)} \end{aligned}$$

k) On a

$$\begin{aligned} \ln(4) + \ln(15) + \ln(42) - \ln(2) - \ln(70) - \ln(9) &= 2\ln(2) + \ln(3) + \ln(5) + \ln(2) + \ln(3) + \ln(7) \\ &\quad - \ln(2) - \ln(7) - \ln(2) - \ln(5) - 2\ln(3) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

Correction de la question 2

1. On calcule le discriminant de ce polynôme de degré 2 :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-5)^2 - 4 \times 4 \times 1 \\ &= 25 - 16 = 9 \end{aligned}$$

Les solutions sont alors

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5+3}{2} = 4 \\ x_2 &= \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5-3}{2} = 1 \end{aligned}$$

2. On peut éventuellement remarquer que cette équation n'est définie que pour $x > \frac{-3}{2}$. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} = x + 2 &\Leftrightarrow (2x+3) = (x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

3. On note tout d'abord que cette équation n'est valable que si $x \neq 0$ et si $x \neq \frac{-1}{2}$. De plus pour $x \neq \frac{-1}{2}$ on a $\frac{1}{2+\frac{1}{x}} = \frac{x}{2x+1}$; ainsi (pour tout $x \notin \{0, -\frac{1}{2}\}$) on a

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x} + \frac{1}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{3}} &\Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{x}{2x+1} = \frac{3}{x} \\
&\qquad (\Leftarrow\text{: car } x \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \frac{2(2x+1)+x^2}{x(2x+1)} = \frac{3(2x+1)}{x(2x+1)} \\
&\Leftrightarrow 4x+2+x^2 = 6x+3 \\
&\qquad (\Leftarrow\text{: car } x \notin \{0, -\frac{1}{2}\}) \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0
\end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme du second degré est

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) = 8$$

Ainsi les solutions de cette équation sont

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}, \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

Ainsi

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{3}} \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2} \text{ ou } x = 1-\sqrt{2}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
7x^3 - 3x^2 + 6x^4 = 0 &\Leftrightarrow x^2(6x^2+7x-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 6x^2+7x-3 = 0
\end{aligned}$$

Le discriminant de polynôme est $\Delta = 7^2 - 4 \times 6 \times (-3) = 121$, et les solutions sont donc

$$x_1 = \frac{-7+11}{2\times 6} = \frac{1}{3}, \qquad x_2 \frac{-7-11}{2\times 6} = -\frac{3}{2}$$

Ainsi

$$7x^3 - 3x^2 + 6x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{-3}{2}$$

5. Il s'agit ici de la différence entre deux carrés ; on peut donc utiliser $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. On a alors

$$\begin{aligned}
3(3x+1)^2 - 16x^2 = 0 &\Leftrightarrow (3\sqrt{3}x + \sqrt{3})^2 - (4x)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (3\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 4x)(3\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 4x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (4+3\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0 \text{ ou } (3\sqrt{3}-4)x + \sqrt{3} = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}
\end{aligned}$$

et ce car $4+3\sqrt{3} \neq 0$ (somme de deux réels strictement positifs) et $3\sqrt{3}-4 \neq 0$ (car sinon $3\sqrt{3} = 4$, et en mettant les deux membres au carré on trouve $27 = 16$).

6. On cherche une solution évidente, comme nous dit l'énoncé : $x = 0$ n'est pas solution, alors on essaie $x = 1$:

$$1^3 + 7 \times 1^2 - 17 \times 1 + 9 = 1 + 7 - 17 + 9 = 0$$

Donc $x = 1$ est une solution de cette équation. La technique est alors d'essayer d'écrire le polynôme comme $(X - 1)Q$:

$$\begin{aligned} X^3 + 7X^2 - 17X + 9 &= (X - 1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) \\ &= \alpha X^3 + (\beta - \alpha)X^2 + (\gamma - \beta)X - \gamma \end{aligned}$$

Par identification on trouve $Q = X^2 + 8X - 9$. On calcule les racines de ce polynôme :

$$\begin{aligned} \Delta &= 8^2 - 4 \times (-9) = 100 \\ x_1 &= \frac{-8 + 10}{2} = 1, \qquad x_2 = \frac{-8 - 10}{2} = 9 \end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation sont $x = 1$ et $x = 9$.

7. On pose $X = e^x$ comme le dit l'énoncé ; on a alors $X^2 = e^{2x}$, et ainsi

$$3e^{2x} + 4e^x - 1 = 0 \to 3X^2 + 4X - 1 = 0$$

Résolvons cette équation, ce qui donnera des solutions potentielles pour l'équation originelle. On a

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 28 \\ X_1 &= \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \qquad X_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

On aurait alors $e^x = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ ou $e^x = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$. La première possibilité est impossible, car $e^x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; la deuxième possibilité est possible, car $\sqrt{7} > 2$ (car $7 > 4$). Ainsi

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{\sqrt{7} - 2}{3} \\ \text{donc } x &= \ln\left(\frac{\sqrt{7} - 2}{3}\right) \end{aligned}$$

Réciproquement, on peut (on devrait, mais ça n'est pas grave si on ne le fait pas) vérifier que cette valeur est une solution de l'équation de départ :

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{\sqrt{7} - 2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{7} - 2}{3}\right) - 1 &= 3\frac{7 + 4 - 4\sqrt{7}}{9} + \frac{4\sqrt{7}}{3} - \frac{8}{3} - 1 \\ &= \frac{7 + 4 - 8 - 3}{3} + \frac{-3 \times 4 + 3 \times 4}{9}\sqrt{7} \\ &= \frac{11 - 11}{3} + \frac{12 - 12}{9}\sqrt{7} = 0 \end{aligned}$$