DM 2

À rendre le 5 octobre

Exercice 1

1. a) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $(a_p, b_p) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(1 + i2\sqrt{2})^p = a_p + ib_p\sqrt{2}$. On précisera a_0 et b_0 et on donnera les expressions de a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

   b) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
   $$a_p - b_p = (-1)^p + 6\left((-1)^p b_0 + \ldots + (-1)^{p-k} b_k + \ldots + (-1) \times b_{p-1}\right)$$

   c) En déduire que la proposition « $b_p = 0$ et a_p est un multiple de 3 » est fausse pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. On note θ l'unique réel de $[0; \pi]$ tel que $\cos\theta = 1/3$. L'objectif de cette question est de démontrer que θ/π est irrationnel. Pour cela, on procède par l'absurde et on suppose que θ/π est rationnel. On peut alors écrire $\theta/\pi = m/n$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}$ ($n \neq 0$).

   a) Justifier que $e^{i2n\theta} = 1$.

   b) Démontrer que $\sin(\theta) = 2\sqrt{2}/3$ et en déduire la valeur de $e^{i\theta}$.

   c) En déduire que $\left(1 + i2\sqrt{2}\right)^{2n} = 3^{2n}$.

   d) En utilisant les résultats de la question 1, aboutir à une absurdité et conclure.

Exercice 2

Soient α, β, γ trois nombres réels. L'objectif de cet exercice est de factoriser l'expression
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1$$
et d'en déduire que cette quantité est nulle lorsque α, β et γ sont les mesures de trois angles d'un triangle. Pour cela on considère le polynôme du second degré
$$P(x) = x^2 + 2(\cos\alpha\cos\beta)x + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1$$

1. a) Montrer que le discriminant Δ de P est égal à $(2\sin\alpha\sin\beta)^2$.

   b) En déduire les deux racines de P.

   c) Écrire P sous forme factorisée.

2. Montrer que $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

3. Montrer que
$$P(\cos(\gamma)) = 4\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)$$

4. Conclure.

Correction de l'exercice 1

1. a) On va montrer cette propriété $\mathcal{P}(p) =$« $\exists(a_p, b_p) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(1+i2\sqrt{2})^p = a_p + ib_p\sqrt{2}$ » par récurrence sur p.

   — Initalisation : pour $p = 0$ on a $(1+i2\sqrt{2})^p = 1$, qui peut s'écrire $1 + i\sqrt{2} \times 0$. Ainsi on peut prendre $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ et on a bien $(1+2i\sqrt{2})^0 = a_0 + i\sqrt{2}b_0$, ce qui prouve $\mathcal{P}(0)$.

   — Hérédité : supposons qu'il existe $a_p, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $(1+2i\sqrt{2})^p = a_p + i\sqrt{2}b_p$, et montrons qu'il existe $a_{p+1}, b_{p+1} \in \mathbb{Z}$ tels que $(1+2i\sqrt{2})^{p+1} = a_{p+1} + i\sqrt{2}b_{p+1}$. On écrit

$$\begin{aligned}(1+2i\sqrt{2})^{p+1} &= (1+2i\sqrt{2})^p \times (1+2i\sqrt{2})\\ &= (a_p + i\sqrt{2}b_p)(1+2i\sqrt{2})\\ &= a_p + 2i\sqrt{2}a_p + i\sqrt{2}b_p + (i\sqrt{2}b_p)(2i\sqrt{2})\\ &= a_p - 4b_p + i\sqrt{2}(2a_p + b_p)\end{aligned}$$

   Si a_p et b_p sont entiers, $a_p - 4b_p$ et $2a_p + b_p$ sont aussi des entiers. On pose alors $a_{p+1} = a_p - 4b_p$ et $b_{p+1} = 2a_p + b_p$, et ceci montre $\mathcal{P}(p+1)$.

   La propriété est démontrée par récurrence.

   b) On démontre une fois encore la propriété, que l'on note $\mathcal{Q}(p)$, par récurrence sur p :

   — Initialisation : pour $p = 0$ on a $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ donc $a_0 - b_0 = 1$ et $(-1)^0 + 6 \times ((-1)^0 \times 0) = 1$; la propriété est vraie au rang 0.

   — Supposons la propriété vraie au rang n et montrons-la au rang $n+1$. On écrit

$$\begin{aligned}a_{p+1} - b_{p+1} &= (a_p - 4b_p) - (2a_p + b_p)\\ &= -a_p - 5b_p\\ &= -(a_p - b_p) - 6b_p\\ &= -(-1)^p - 6((-1)^p b_0 + \ldots + (-1)b_p) - 6b_p\\ &= (-1)^{p+1} + 6\left((-1)^{p+1}b_0 + \ldots + (-1)^{p+1-k}b_k + \ldots + (-1)^2 b_{p-1} + (-1) \times b_p\right)\end{aligned}$$

   Ainsi la propriété est vraie au rang $p+1$.

   La propriété est vraie pour tout p.

   c) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $b_p = 0$ et a_p est un multiple de 3 ; montrons que nous obtenons une contradiction. Si $b_p = 0$, l'égalité précédente devient

$$a_p = (-1)^p + 6 \times A_k$$

   avec A_k un entier (car -1 est un entier, et tous les b_k sont des entiers). Puisque a_p est supposé être un multiple de 3, $a_p - 6 \times A_k$ l'est aussi ; donc $(-1)^p$ est un multiple de 3, ce qui est absurde.

2. a) On a $\frac{\theta}{\pi} = \frac{m}{n}$, donc $\theta = \frac{m}{n}\pi$ et $n\theta = m\pi$. Ainsi $i2n\theta = 2\pi \times i \times m$. On a alors

$$e^{i2n\theta} = e^{i2\pi m} = 1$$

   car $2\pi m$ est un multiple de 2π.

b) On utilise la relation $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$:

$$1 = \frac{1}{3^2} + \sin(\theta)^2 \text{ donc} \qquad \sin(\theta)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Ceci montre que $\sin(\theta) = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$. Or par hypothèse $\theta \in [0;\pi]$, et $x \to \sin(x)$ est positive sur $[0;\pi]$; ainsi $\sin(\theta) \geq 0$ et donc $\sin(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ainsi

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

c) D'après la question 1, on a $\left(e^{i\theta}\right)^{2n} = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{2n} = 1\\
\Leftrightarrow &\left(\frac{1}{3}\left(1 + i2\sqrt{2}\right)\right)^{2n} = 1\\
\Leftrightarrow &(1 + i2\sqrt{2})^{2n} = 3^{2n}
\end{aligned}$$

d) D'après la question 1a), il existe a_{2n}, b_{2n} entiers tels que $(1 + i2\sqrt{2})^{2n} = a_{2n} + i\sqrt{2}b_{2n}$. D'après la question 2c) on a alors

$$a_{2n} + i\sqrt{2}b_{2n} = 3^{2n}$$

Par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire on trouve alors $a_{2n} = 3^{2n}$ et $b_{2n} = 0$. On est alors dans les conditions de la question 1c), puisque a_{2n} est un multiple (et même une puissance) de 3, et $b_{2n} = 0$. Or cette question montre que ces conditions mènent à une absurdité : on obtient donc une contradiction. Ainsi, on ne peut pas avoir $\frac{\theta}{\pi} = \frac{m}{n}$.

Correction de l'exercice 2

1. a) On calcule le discriminant de P :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (2(\cos\alpha\cos\beta))^2 - 4(\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) - 1)\\
&= 4\left(\cos^2\alpha(\cos^2\beta - 1) - \cos^2(\beta) + 1\right)\\
&= 4\left(\cos^2\alpha - 1\right)\left(\cos^2(\beta) - 1\right)\\
&= 4\sin^2\alpha\sin^2\beta = (2\sin\alpha\sin\beta)^2
\end{aligned}$$

et ce car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Le discriminant est positif, P a donc deux racines réelles, qui sont :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta}{2}, & x_2 &= \frac{-2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta}{2}\\
x_1 &= \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta, & x_2 &= \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\\
x_1 &= -\cos(\alpha - \beta), & x_2 &= -\cos(\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

c) Le coefficient dominant de P étant 1, on a $P(X) = (X + \cos(\alpha + \beta))(X + \cos(\alpha - \beta))$.

2. Le plus simple est de partir du membre droit pour essayer d'arriver au membre gauche (après tout développer est plus simple que chercher à factoriser). On passe par la définition du cosinus avec des exponentielles :

$$\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) &= 2\frac{e^{i\frac{p+q}{2}}+e^{-i\frac{p+q}{2}}}{2}\times\frac{e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)}+e^{i\left(-\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)}+e^{i\left(-\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{ip}+e^{iq}+e^{-iq}+e^{-ip}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{ip}+e^{-ip}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{iq}+e^{-iq}\right) = \cos(p)+\cos(q)
\end{aligned}$$

3. Écrivons $P(\cos\gamma)$ en utilisant la forme factorisée :

$$\begin{aligned}
P(\cos\gamma) &= (\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta))(\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)) \\
&= \left(2\cos\left(\frac{\gamma+\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-(\alpha+\beta)}{2}\right)\right)\left(2\cos\left(\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-(\alpha-\beta)}{2}\right)\right) \\
&= 4\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

On retrouve tous les termes de l'énoncé, car notre deuxième terme est le quatrième terme dans l'énoncé (car $\cos(-x)=\cos(x)$).

4. La question précédente a calculé $P(\cos\gamma)$ sous forme factorisée. En regardant l'autre forme on trouve

$$\begin{aligned}
P(\cos\gamma) &= (\cos\gamma)^2+2(\cos\alpha\cos\beta)\cos\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1 \\
&= \cos^2\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1
\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'expression dont on nous parlait au tout début de l'exercice. Pour achever l'exercice, il faut donc montrer que $P(\cos\gamma)$ s'annule lorsque α,β et γ sont les mesures des trois angles d'un triangle. Cette condition peut se reformuler ainsi : $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (en radians. Ainsi $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$, et donc

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=0$$

Comme ce terme est l'un des facteurs dans $P(\cos\gamma)$, on a $P(\cos\gamma)=0$, ce qu'il fallait démontrer.