DM 3

À rendre le 9 novembre

Exercice 1

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose
$$P_n = \prod_{j=1}^{n} (1 - a_j).$$
   a) Que vaut P_0 ?
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation de récurrence très simple existe-t-il entre P_n et P_{n+1} ?
   c) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a
$$P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1$$
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on pose $a_j = j/n$, de sorte que
$$P_k = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$
   a) Calculer P_n.
   b) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a
$$P_k = \frac{k!}{n^k} \binom{n-1}{k}$$
   c) La formule de la question précédente est-elle valable pour $k = 0$?
   d) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = 1$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit, c'est-à-dire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$$

1. On pose $r = u_1 - u_0$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$.
2. Que peut-on alors dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Correction de l'exercice 1

1. a) On écrit

$$P_0 = \prod_{j=1}^{0}(1-a_j)$$

Or il n'y a pas d'entiers entre 1 et 0 ; ce produit est donc vide, et donc par convention il est égal à 1. Donc $P_0 = 1$.

b) On a tout simplement

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \prod_{j=1}^{n+1}(1-a_j) \\ &= \prod_{j=1}^{n}(1-a_j) \times \prod_{j=n+1}^{n+1}(1-a_j) \qquad \text{par la relation de Chasles} \\ &= P_n \times (1-a_{n+1}) \end{aligned}$$

c) Démontrons la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1$ » par récurrence sur n.

— Initialisation : pour $n = 0$ on a

$$\begin{aligned} P_0 + \sum_{k=1}^{0} a_k P_{k-1} &= P_0 \qquad \text{car une somme vide est nulle par convention} \\ &= 1 \qquad \text{d'après la question 1)a)} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\mathcal{P}(n+1) \Leftrightarrow P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k P_{k-1} = 1 \Leftrightarrow P_{n+1} + a_{n+1}P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1$$

d'après la relation de Chasles. Or, puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on a $\sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1 - P_n$; ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n+1) \Leftrightarrow P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k P_{k-1} = 1 &\Leftrightarrow P_{n+1} + a_{n+1}P_n + 1 - P_n = 1 \\ &\Leftrightarrow P_{n+1} + a_{n+1}P_n - P_n = 0 \\ &\Leftrightarrow P_{n+1} = P_n - a_{n+1}P_n \end{aligned}$$

Or cette dernière relation est vraie, d'après la question 1)b) ; ainsi on a bien $\mathcal{P}(n+1)$.

La propriété est démontrée par récurrence.

2. a) On a

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{j}{n}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n}\right) \\ &= 0 \qquad \text{car } \frac{n}{n} = 1 \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k} &= \frac{k!}{n^k}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \\
&= \frac{1}{n^k}\frac{1\times 2\times\ldots\times(n-k-1)\times(n-k)\times\ldots\times(n-1)}{1\times 2\times\ldots\times(n-1-k)} \\
&= \frac{1}{n^k}\times((n-k)\times(n-1))
\end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que $P_k = \frac{1}{n^k}\times((n-k)\times(n-1))$. Regardons maintenant P_k :

$$\begin{aligned}
P_k &= \prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{j}{n}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{k}\frac{n-j}{n} \\
&= \frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\ldots\times\frac{n-k}{n} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k}
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien $P_k = \frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k}$.

c) Pour $k=0$ le membre droit devient $\frac{0!}{n^0}\binom{n-1}{0} = \frac{1}{1}\times 1 = 1$. Comme $P_0 = 1$ d'après la question 1)a), la formule est bien valable pour $k=0$.

d) D'après la question 1)c), on a

$$P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1$$

Or $P_n = 0$ d'après la question 2)a), $a_k = \frac{k}{j}$ par définition, et on a également d'après la question précédente

$$P_{k-1} = \frac{(k-1)!}{n^{k-1}}\binom{n-1}{k-1}$$

Ainsi

$$0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{(k-1)!}{n^{k-1}}\binom{n-1}{k-1} = 1$$

On retrouve bien que $\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k-1} = 1$, car $k\times(k-1)! = k!$ et $n\times n^{k-1} = n^k$.

Correction de l'exercice 2

1. On montre cette proposition par récurrence sur n ; mais comme la relation donnée relie u_n, u_{n+1} et u_{n+2}, il va falloir faire une récurrence double.

— Initialisation : on a $u_0 = u_0 + 0 \times r$, et $u_1 = u_0 + 1 \times (u_1 - u_0)$; la proposition est ainsi vérifiée pour les rangs 0 et 1.

— Hérédité : supposons la propriété vraie pour u_n et u_{n+1}, et montrons qu'elle est vraie pour u_{n+2}. On réécrit la relation entre les termes de la suite :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2} \Leftrightarrow u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n \\ &= 2u_0 + 2(n+1)r - u_0 - nr \\ &= u_0 + (2n + 2 - n)r \\ &= u_0 + (n+2)r \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n + 2$.

La propriété est démontrée par récurrence sur n.

2. Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété énoncée au début de l'exercice, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement une suite arithmétique, de raison $u_1 - u_0$.