DM 4

À rendre le 7 décembre

Problème

I) Définitions, exemples

Soit $n \in \mathbb{N}$. On étudie les polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

1. Démontrer que si P_n existe alors il est unique.
2. a) Justifier que $P_0 = 2$ et $P_1 = X$.
   b) Développer $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2$ et en déduire P_2.
3. Montrer par récurrence à 2 crans que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n existe et que

$$P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$$

4. a) Déterminer P_3, P_4, P_5.
   b) Déterminer la factorisation de P_5 en produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

II) Factorisation

1. Former une supposition sur le degré de P_n, puis démontrer le résultat par récurrence. Déterminer aussi son coefficient dominant.
2. Soit $\theta \in]0; \pi[$ un réel fixé.
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta)$$

   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$.
3. En déduire que $2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ est une racine de P_n pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. En déduire la factorisation complète de P_n sur $\mathbb{R}[X]$.
4. Comparer les deux factorisations de P_5 obtenues et en déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/10)$ et $\cos(3\pi/10)$.

Correction du I)

1. Supposons que P_n existe, et soit Q_n un autre polynôme qui vérifie cette relation. On a
$$P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^n+\frac{1}{z^n}=Q_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$$
et ce pour tout $z\in\mathbb{C}^*$. Puisqu'il y a une infinité de nombres de la forme $z+\frac{1}{z}$ avec $z\in\mathbb{C}^*$, les polynômes P_n et Q_n ont la même valeur en une infinité de points. Ceci veut dire que P_n-Q_n a une infinité de racines ; or le seul polynôme avec une infinité de racines est le polynôme nul, et donc $P_n=Q_n$, ce qui prouve l'unicité.
2. a) Si $n=0$, on cherche un polynôme tel que
$$P_0\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^0+\frac{1}{z^0}=2$$
Le polynôme constant égal à 2 vérifie cette égalité ; par unicité on a nécessairement $P_0=2$. De même, si $n=1$ on cherche
$$P_1\left(z+\frac{1}{z}\right)=z+\frac{1}{z}$$
Le polynôme X vérifie cette égalité, donc par unicité on a $P_1=X$.

   b) On a
$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=z^2+\frac{z}{z}+\frac{1}{z^2}=z^2+\frac{1}{z^2}+2$$
Ainsi le polynôme $P=X^2-2$ vérifie $P\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^2+\frac{1}{z^2}$; par unicité, c'est P_2, et on a donc $P_2=X^2-2$.
3. Soit $\mathcal{P}(n)$ = « il existe un polynôme P_n vérifiant $P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^n+\frac{1}{z^n}$ », et montrons cette proposition par récurrence à 2 crans sur n.
   — Initialisation : on a montré l'existence de P_0 et P_1, et même de P_2.
   — Hérédité : supposons que P_{n-2} et P_{n-1} existent avec les bonnes propriétés, et montrons que P_n existe. On a
$$\begin{aligned}(XP_{n-1}-P_{n-2})\left(z+\frac{1}{z}\right)&=\left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)-P_{n-2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\\&=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)-\left(z^{n-2}+\frac{1}{z^{n-2}}\right)\\&=z^n+z^{n-2}+\frac{1}{z^{n-2}}+\frac{1}{z^n}-z^{n-2}-\frac{1}{z^{n-2}}\\&=z^n+\frac{1}{z^n}\end{aligned}$$
   Ainsi le polynôme $XP_{n-1}-P_{n-2}$ vérifie bien la condition, ce qui montre l'existence d'un polynôme vérifiant la condition, et donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

   De plus, d'après la question 1 il n'y a qu'un seul polynôme vérifiant cette condition ; on est donc en mesure d'affirmer que $P_n=XP_{n-1}-P_{n-2}$.
4. (a) On utilise la relation de récurrence :
$$\begin{aligned}&P_3=XP_2-P_1=X^3-2X-X=X^3-3X\\&P_4=XP_3-P_2=X^4-3X^2-X^2+2=X^4-4X^2+2\\&P_5=XP_4-P_3=X^5-4X^3+2X-X^3+3X=X^5-5X^3+5X\end{aligned}$$

(b) On voit que 0 est une racine évidente, et on trouve que $P_5 = X(X^4 - 5X^2 + 5)$. Il s'agit d'une équation bicarrée :

$$\begin{aligned} X^4 - 5X^2 + 5 = 0 &\Leftrightarrow Y^2 - 5Y + 5 = 0 \text{ en posant } Y = X^2 \\ &\Leftrightarrow \left(Y - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(Y - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(X^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(X - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right) = \end{aligned}$$

Ainsi $P_5 = X\left(X - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)$.

Correction du II)

1. Il semblerait que $\deg P_n = n$ et que son coefficient dominant soit 1. Montrons cette proposition par une récurrence à deux crans :
   - Initialisation : La proposition est vérifiée pour P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5.
   - Hérédité : supposons que $\deg P_{n-2} = n-2$ et $\deg P_{n-1} = n-1$, et que leurs coefficients dominants soient 1 ; montrons que $\deg P_n = n$ et que son coefficient dominant est 1. On écrit

     $$\begin{aligned} P_{n-2} &= X^{n-2} + a_{n-3}X^{n-3} + \ldots + a_1X + a_0 \\ P_{n-1} &= X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_1X + b_0 \end{aligned}$$

     Alors

     $$\begin{aligned} P_n &= XP_{n-1} - P_{n-2} \\ &= X(X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-3} + \ldots + b_1X + b_0) - (X^{n-2} + a_{n-3}X^{n-3} + \ldots + a_1X + a_0) \\ &= X^n + b_{n-2}X^{n-1} + (b_{n-3} - 1)X^{n-2} + \ldots + (b_0 - a_1)X - a_0X \end{aligned}$$

     On a bien que $\deg P_n = 1$ et son coefficient dominant est 1.

   La propriété est démontrée par récurrence.

2. a) On a

   $$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta) &\Leftrightarrow z^2 + 1 = 2z\cos(\theta) \qquad \text{car } z \neq 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0 \end{aligned}$$

   Le discriminant du trinôme est $4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta)$, et est donc négatif. Les racines du polynôme sont donc

   $$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2\cos(\theta) + 2i|\sin(\theta)|}{2} \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) \qquad \text{car } \theta \in]0;\pi[\text{ donc est de sinus positif} \\ &= e^{i\theta} \end{aligned}$$

   $z_2 = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{-i\theta}$

Donc $z \in \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$; on remarque que réinjecter cette solution dans l'équation donne les formules d'Euler.

b) On sait que $P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$. En appliquant ceci à $z = e^{i\theta}$ on obtient

$$\begin{aligned} P_n\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) &= (e^i\theta)^n + (e^{-i\theta})^n \\ P_n\left(2\cos(\theta)\right) &= 2\cos(n\theta) \end{aligned}$$

3. Si l'on prend $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, l'équation précédente donne

$$\begin{aligned} P_n\left(2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) &= 2\cos\left(n \times \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\ &= 2\cos((2k+1)\frac{pi}{2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\cos(\pi/2) = \cos(3\pi/2) = \ldots = \cos((2k+1)\pi/2) = 0$. Ainsi $2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ est une racine de P_n, et ce pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a donc trouvé n racines pour le polynôme P_n, qui est de degré n ; ainsi on a toutes les racines de P_n, et

$$P_n = (X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)) \times \ldots \times (X - 2\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right))$$

[Ce qui suit est un peu hors-programme, mais quand même intéressant :] Posons $\alpha_k = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$. On a en fait que α_k est une racine de P_n pour tout $k \in \mathbb{N}$ ou même dans $\mathbb{Z}$. Pour autant, le polynôme n'a pas une infinité de racines, car il est non nul (son coefficient dominant est 1, par exemple). Comment est-ce que ça se fait ? En fait, par 2π-périodicité de cos, on a

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2} \pm 2\ell\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{2k \pm 4n\ell + 1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2(k \pm 2n\ell) + 1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \alpha_{k \pm 2n\ell} \end{aligned}$$

Ainsi deux racines α_p et α_q sont en réalité égales si $p - q$ est un multiple de $2n$, c'est-à-dire si $p = q[2n]$ ("$p = q$ à $2kn$ près", ou "p congru à q modulo $2n$"). Ainsi, si on a une racine α_k, c'est en fait une racine de la forme $\alpha_{k'}$ avec $k' \in [\![-(n-1), n-1]\!]$: il suffit d'ajouter ou d'enlever des multiples de $2n$ à l'entier k, jusqu'à tomber dans cet intervalle (d'amplitude $2n-1$, donc correspondant à des racines toutes distinctes). Comme $\cos(-x) = \cos(x)$, on a $\alpha_k = \alpha_{-k-1}$, et donc $\alpha_{-1} = \alpha_0, \alpha_{-2} = \alpha_1, \ldots, \alpha_{-n-1} = \alpha_{n-2}$. Au final les racines sont simplement les $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$.

4. On avait obtenu à la fin de la partie précédente que

$$P_5 = \left(X - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

D'autre part, on vient de montrer que

$$\begin{aligned}
P_5 &= \left(X - 2\cos\left(\frac{2\times 0+1}{10}\pi\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\frac{2\times 1+1}{10}\pi\right)\right) \\
&\quad \times \left(X - 2\cos\left(\frac{2\times 2+1}{10}\pi\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\frac{2\times 3+1}{10}\pi\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\frac{2\times 4+1}{10}\pi\right)\right) \\
&= \left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or $\cos(5\pi/10) = \cos(\pi/2) = 0$, et on a aussi $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ d'après les formules de trigonométrie, ce qui donne $\cos(9\pi/10) = -\cos(\pi/10)$ et $\cos(7\pi/10) = -\cos(3\pi/10)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
P_5 &= X(X - 2\cos(\pi/10))(X + 2\cos(\pi/10))(X - 2\cos(3\pi/10))(X + 2\cos(3\pi/10)) \\
&= X\left(X - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Il suffit désormais de trouver quel facteur correspond à quel cosinus. On a $\cos(\pi/10) > 0$ et $\cos(3\pi/10) > 0$ car $\frac{3}{10} < \frac{1}{2}$; ainsi les cosinus sont égaux aux grandes racines carrées (divisées par 2). On sait aussi que cos est décroissante sur $]0; \pi[$; ainsi $\cos(3\pi/10) < \cos(\pi/10)$. Comme $5 - \sqrt{5} < 5 + \sqrt{5}$, et par croissance de la fonction racine carrée, on a $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} > \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, et donc

$$\begin{aligned}
\cos(\pi/10) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\
\cos(3\pi/10) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$