DM 5

À rendre le 11 janvier

Exercice 1

Résoudre le système suivant, de paramètre λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z &= \lambda^2 \\ x + \lambda y - \lambda z &= \lambda \\ x - y + \lambda z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2

1. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 2$ et $P(1) = 7$. Combien de possibilités y'a-t-il et quelles sont-elles ?
2. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(-1) = -1$. Combien de possibilités y'a-t-il et quelles sont-elles ?
3. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = 4, P(2) = -1, P(4) = 1$. Combien de possibilités y'a-t-il et quelles sont-elles ?
4. Soient y_1, y_2, y_3 des réels, et x_1, x_2, x_3 des réels distincts. Combien y'a-t-il de polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(x_i) = y_i$?

Correction de l'exercice 1

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z &= \lambda^2 \\ x + \lambda y - \lambda z &= \lambda \\ x - y + \lambda z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \lambda z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= \lambda^2 \\ x + \lambda y - \lambda z &= \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \lambda z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= \lambda^2 \\ (\lambda+1)y - 2\lambda z &= \lambda - 1 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \lambda z &= 1 \\ (1+\lambda)y + (1-\lambda^2)z &= \lambda^2 - \lambda \\ (\lambda+1)y - 2\lambda z &= \lambda - 1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \lambda z &= 1 \\ (1+\lambda)y + (1-\lambda^2)z &= \lambda^2 - \lambda \\ (\lambda^2 - 2\lambda - 1)z &= \lambda - 1 - \lambda^2 + \lambda \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Cherchons les racines de $X^2 - 2X - 1$: $\Delta = 8$ et les racines sont $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$. Donc :

- Si $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$: la dernière équation devient $0 = -(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$. Puisque $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$, on a $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 2 \neq 0$; ainsi on a $0 = 2$, ce qui est impossible : il n'y a pas de solution.
- Si $\lambda \notin \{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$: on a $z = \frac{-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-2\lambda-1}$. On a donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \lambda z &= 1 \\ (1+\lambda)y &= \lambda^2 - \lambda - (1-\lambda^2)\frac{-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-2\lambda-1} \\ z &= \frac{-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-2\lambda-1} \end{cases}$$

  Il faut distinguer pour savoir si $\lambda + 1 = 0$:

  - Si $\lambda = -1$: le système devient

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z &= 1 \\ 0 &= \lambda^2 - \lambda = 2 \\ z &= \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

    Là encore, le système n'a pas de solution.

  - Si $\lambda \neq -1$, on a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \lambda z &= 1 \\ y &= \frac{\lambda^2-\lambda-(1-\lambda^2)\frac{-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-2\lambda-1}}{1+\lambda} \\ z &= \frac{-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-2\lambda-1} \end{cases}$$

    Ceci donne une unique solution en fonction de λ (on n'est pas forcés de simplifier dans ces exercices) :

$$S = \left\{ \left(1 + \frac{\lambda^2 - \lambda - (1-\lambda^2)\frac{-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-2\lambda-1}}{1+\lambda} - \lambda\frac{-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-2\lambda-1}, \frac{\lambda^2 - \lambda - (1-\lambda^2)\frac{-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-2\lambda-1}}{1+\lambda}, \frac{-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-2\lambda-1}\right) \right\}$$

Correction de l'exercice 2

1. Puisque $P(0) = 2$ le coefficient constant du polynôme est 2. Ainsi le polynôme $5X + 2$ convient. Mais c'est aussi le cas du polynôme $X^2 + 4X + 2$. En général, pour un polynôme $P = aX^2 + bX + 2$ on obtient $a + b = 5$, et donc l'ensemble des polynômes vérifiant $P(0) = 2$ et $P(1) = 7$ est infini : c'est l'ensemble
$$\{P = \alpha X^2 + (5 - \alpha)X + 2, \alpha \in \mathbb{R}\}$$
2. Soit P un tel polynôme ; son coefficient constant est alors 1, et $P = aX^2 + bX + 1$. On a $a + b = 1$ et $a - b = -2$; ainsi $a = \frac{-1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$. On a ainsi une seule solution au système, le polynôme $\frac{-1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1$.
3. Posons $P = aX^2 + bX + c$. On a alors
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 4 \\ 4a+2b+c &=& -1 \\ 16a+4b+c &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 4 \\ 3a+b+0 &=& -5 \\ 16a+4b+c &=& 1 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 4 \\ 3a+b+0 &=& -5 \\ 15a+3b+0 &=& -3 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 4 \\ 3a+b+0 &=& -5 \\ 6a+0+0 &=& 12 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$
$$\Leftrightarrow a = 2, b = -11, c = 13$$
$$\Leftrightarrow P = 2X^2 - 11X + 13$$
Il n'y a ainsi qu'une seule possibilité.
4. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2$ et supposons qu'il vérifie $P(x_i) = y_i$. On a alors le système suivant
$$\left\{\begin{array}{l} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{array}\right.$$
Ceci est un système linéaire (les inconnues sont a, b, c, les autres étant des constantes fixées). On le résout avec un pivot de Gauss :
$$\left\{\begin{array}{l} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax_1^2 + bx_1 + c &=& y_1 \\ a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) &=& y_2 - y_1 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &=& y_3 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax_1^2 + bx_1 + c &=& y_1 \\ a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) &=& y_2 - y_1 \\ a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) &=& y_3 - y_1 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$
On veut ensuite éliminer le b en bas ; pour cela on fait $L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_2$; on veut
$$(x_3 - x_1) = \lambda(x_2 - x_1) \Rightarrow \lambda = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

La division est possible car les x_i sont supposés distincts. Ainsi

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} ax_1^2 + bx_1 + c & = & y_1 \\ a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) & = & y_2 - y_1 \\ a\left((x_3^2 - x_1^2) - \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \times (x_2^2 - x_1^2)\right) & = & y_3 - y_1 - \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} L_1$$

Le coefficient en bas à gauche est

$$\begin{aligned}(x_3^2 - x_1^2) - \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \times (x_2^2 - x_1^2) &= (x_3^2 - x_1^2) - (x_3 - x_1)(x_2 + x_1) \\ &= (x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2 - x_1) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \neq 0\end{aligned}$$

Ainsi on a une valeur pour a. Ensuite, en remontant, on a $(x_2 - x_1)b = y_2 - y_{-}a(x_2^2 - x_1^2)$; puisque $x_2 \neq x_1$ on a aussi une unique valeur pour b. Enfin, on obtient avec la première équation une valeur pour c. Ainsi le système a une unique solution : il existe un unique polynôme P tel que $P(x_i) = y_i$.