DM 6

À rendre le 8 février

Exercice 1

(tiré d'un sujet de G2E)

Une puce fait des sauts aléatoires sur les sommets d'un triangle ABC. À chaque saut, elle peut sauter sur place ou sur un des autres sommets. La probabilité que la puce commence sur le sommet A (respectivement B, C) est a_0 (respectivement b_0, c_0). On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « après le n-ème saut, la puce est en A » (respectivement en B, en C) ; on note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, et de même pour b_n et c_n. Enfin, on note $P_{M,N}$ (pour M, N deux sommets) la probabilité de sauter de M vers N.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = P_{A,A}a_n + P_{B,A}b_n + P_{C,A}c_n$. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
2. Soit $a \in]0; \frac{1}{2}[$. On suppose dans cette question que $P_{M,N} = a$ si $M \neq N$, et $P_{M,M} = 1 - 2a$ pour tout sommet M.
   a) Montrer que $a_{n+1} = (1 - 3a)a_n + a$. En déduire a_n pour tout n.
   b) Faire de même pour b_n.
   c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$, $\lim_{n\to+\infty} c_n$. Interprétation ?
3. Dans cette question on suppose $P_{A,A} = 1$, $P_{B,A} = P_{B,B} = \frac{1}{2}$ et $P_{C,A} = P_{C,B} = P_{C,C} = \frac{1}{3}$.
   a) Comment interpréter la condition $P_{A,A} = 1$?
   b) Déterminer les valeurs $P_{M,N}$ manquantes.
   c) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire l'expression de c_n.
   d) Montrer que $b_{n+2} = \frac{5}{6}b_{n+1} - \frac{1}{6}b_n$. En déduire l'expression de b_n en fonction de b_1 et b_0.
   e) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n$. Interprétation ?

Exercice 2

Dans le plan, soit ABC un triangle non plat, avec $A(0; a)$, $B(b; 0)$, $C(c; 0)$; on suppose $a \neq 0$ et $b \neq c$.

1. Vérifier que $\mathcal{C}_m : (x - b)(x - c) + y^2 - 2my = 0$ est un cercle, passant par B et C. On précisera son centre.
2. En déduire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC. On appele Ω son centre ; on précisera ses coordonnées.
3. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC. *(Le centre de gravité est l'isobarycentre des points A, B, C.)*
4. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H de ABC. *(L'orthocentre est le point d'intersection des hauteurs du triangle.)*
5. Déterminer une relation liant $\vec{\Omega H}$ et $\vec{\Omega G}$, et en déduire que Ω, H et G sont alignés.

Correction de l'exercice 1

1. Les évènements (A_n, B_n, C_n) forment un système complet d'évènements ; d'après la formule des probabilités totales on a

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n) \times \mathbb{P}(C_n)$$

Or les probabilités $P_{M,N}$ données dans l'énoncé représentent la probabilité d'atterrir sur N sachant qu'on était sur M au tour précédent ; on a ainsi $P_{M,N} = \mathbb{P}(N_{n+1}|M_n)$. Ainsi

$$a_{n+1} = P_{A,A}\,\mathbb{P}(A_n) + P_{B,A}\,\mathbb{P}(B_n) + P_{C,A}\,\mathbb{P}(C_n) = P_{A,A}a_n + P_{B,A}b_n + P_{C,A}c_n$$

De la même façon, et toujours selon la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|C_n) \times \mathbb{P}(C_n) \\
&= P_{A,B}a_n + P_{B,B}b_n + P_{C,B}c_n \\
\mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}(C_{n+1}|A_n)\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|B_n)\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|C_n)\,\mathbb{P}(C_n) \\
&= P_{C,A}a_n + P_{C,B}b_n + P_{C,C}c_n
\end{aligned}$$

2. a) La formule de la question précédente devient

$$a_{n+1} = (1-2a)a_n + ab_n + ac_n = (1-2a)a_n + a(b_n + c_n)$$

Or (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, donc $a_n + b_n + c_n = 1$. On a donc

$$a_{n+1} = (1-2a)a_n + a(1-a_n) = (1-3a)a_n + a$$

Cette relation montre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique ; on applique donc la méthode pour les résoudre, en commençant par chercher une solution constante égale à c :

$$c = (1-3a)c + a \Rightarrow 3ac = a \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

On a ensuite $c = (1-3a)c + a$ et $a_{n+1} = (1-3a)a_n + a$, donc

$$a_{n+1} - c = (1-3a)(a_n - c)$$

La suite $(a_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $1-3a$, et on a donc

$$a_n = (1-3a)^n(a_0 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}$$

b) La relation pour b_n devient

$$b_{n+1} = aa_n + (1-2a)b_n + ac_n = (1-3a)b_n + a$$

La relation étant la même on a la même solution constante, et la suite $(b_n - \frac{1}{3})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. On a alors

$$b_n = (1-2a)^n(b_0 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}$$

c) Puisque $a \in]0;\frac{1}{2}[$, on a $1-2a \in]0;1[$; ainsi, $\lim_{n\to+\infty}(1-2a)^n = 0$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(1-2a)^n(a_0 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$$

Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, on a $a_n + b_n + c_n = 1$, ou encore $c_n = 1 - a_n - b_n$. Puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

On peut interpréter ceci en disant qu'au bout d'un temps très long, la puce n'a pas plus de chance de se retrouver sur un sommet que sur un autre ; sa position est distribuée de façon uniforme.

3. a) On a $P_{A,A} = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)$; si cette probabilité est égale à 1, ceci veut dire qu'une puce atterrissant sur A y reste aux tours suivants et ne peut plus en sortir.

b) On a $P_{A,B} = 0, P_{A,C} = 0$ et $P_{B,C} = 0$.

c) En reprenant le résultat de la première question, on a

$$c_{n+1} = P_{A,C}a_n + P_{B,C}b_n + P_{C,C}c_n = \frac{1}{3}c_n$$

Ainsi $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On a donc $c_n = \frac{c_0}{3^n}$.

d) Encore une fois, d'après la première question, on a

$$\begin{aligned}
b_{n+2} &= P_{A,B}a_{n+1} + P_{B,B}b_{n+1} + P_{C,B}c_{n+1} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n\right) + \frac{1}{3}c_{n+1} \\
&= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{6}c_n + \frac{1}{9}c_n \\
&= \frac{1}{4}b_n + \frac{5}{18}c_n
\end{aligned}$$

et ce car $c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n$. D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\frac{5}{6}b_{n+1} - \frac{1}{6}b_n &= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n\right) - \frac{1}{6}b_n \\
&= (\frac{5}{12} - \frac{1}{6})b_n + \frac{5}{18}c_n \\
&= \frac{3}{12}b_n + \frac{5}{18}c_n
\end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales, et on a donc montré la formule. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente d'ordre 2 ; le polynôme caractéristique associé est $X^2 - \frac{5}{6}X + \frac{1}{6}$. On peut calculer le discriminant et trouver les racines α_1 et α_2 :

$$\Delta = \frac{25}{36} - \frac{4}{6} = \frac{1}{36} > 0$$
$$\alpha_1 = \frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{3}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Ainsi $b_n = \frac{\lambda}{3^n} + \frac{\mu}{2^n}$. Pour ce qui est de λ et μ, on a

$$b_0 = \lambda + \mu, \qquad b_1 = \frac{\lambda}{3} + \frac{\mu}{2}$$

Ainsi $6b_1 = 2\lambda + 3\mu = 2b_0 + \mu$, et $\mu = 6b_1 - 2b_0$; on a ensuite $\lambda = 6b_1 - 3b_0$. Au final

$$b_n = \frac{6b_1 - 3b_0}{3^n} + \frac{6b_1 - 2b_0}{2^n} = \frac{2b_1 - b_0}{3^{n-1}} + \frac{3b_1 - b_0}{2^{n-1}}$$

e) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0 + 0 = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$$

Comme $a_n = 1 - b_n - c_n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 - \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} c_n = 1 - 0 - 0 = 1$$

Ainsi, sur un temps suffisamment long, la puce finira par arriver sur A et à y rester.

Correction de l'exercice 2

1. Cette équation est équivalente à

$$\begin{aligned}
&C_m : x^2 - (b+c)x + bc + y^2 - 2my = 0\\
\Leftrightarrow &C_m : \left(x - \frac{b+c}{2}\right)^2 - \frac{(b+c)^2}{4} + bc + (y-m)^2 - m^2 = 0\\
\Leftrightarrow &C_m : \left(x - \frac{b+c}{2}\right)^2 + (y-m)^2 = \frac{(b+c)^2}{4} - bc + m^2
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{(b+c)^2}{4} - bc = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - 4bc}{4} = \frac{(b-c)^2}{4} \geq 0$$

Ainsi le membre gauche est somme de carrés, donc positif : c'est donc un cercle, de centre $\left(\frac{b+c}{2}, m\right)$ (et de rayon $\sqrt{\frac{(b-c)^2}{4} + m^2}$). De plus

$$(b-b)(b-c) + 0^2 - 2m \times 0 = 0$$
$$(c-b)(c-c) + 0^2 - 2m \times 0 = 0$$

Donc B et C sont sur le cercle.

2. On a déjà un cercle qui passe par B et C ; essayons de trouver m tel que $\mathcal{C}_m$ passe par A. On a

$$\begin{aligned}
&(0-b)(0-c) + a^2 - 2ma = 0\\
\Leftrightarrow &a^2 + bc = 2ma\\
\Leftrightarrow &m = \frac{a^2 + bc}{2a}
\end{aligned}$$

Ainsi pour $m = \frac{a^2+bc}{2a}$, le cercle $\mathcal{C}_m$ passe par A, et est donc circonscrit à ABC ; son centre est $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a^2+bc}{2a}\right)$.

3. L'isobarycentre est le barycentre des 3 points avec un poids 1 associé à chacun des points. D'après le cours on a
$$G=\left(\frac{b+c}{3},\frac{a}{3}\right)$$
4. Nous allons tout d'abord déterminer les équations de deux des hauteurs du triangle ; vu le dessin, la hauteur partant de A devrait avoir une équation relativement simple, puis on déterminera la hauteur passant par B. On note $\mathcal{D}_A$ la hauteur passant par A et $\mathcal{D}_B$ passant par B. On a
$$\begin{aligned}M(x,y)\in\mathcal{D}_A &\Leftrightarrow (\vec{AM}|\vec{BC})=0\\ &\Leftrightarrow (c-b)(x-0)+(0-0)(y-a)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \qquad \text{car } c\neq b\end{aligned}$$
Ainsi l'équation de cette hauteur est $x=0$. Pour ce qui est de la deuxième :
$$\begin{aligned}M(x,y)\in\mathcal{D}_b &\Leftrightarrow (\vec{BM}|\vec{AC})=0\\ &\Leftrightarrow (x-b)(c-0)+(y-0)(0-a)=0\\ &\Leftrightarrow cx-ay=bc\end{aligned}$$
Cherchons maintenant les points d'intersection de ces hauteurs :
$$\begin{aligned}M(x,y)\in\mathcal{D}_a\cap\mathcal{D}_b &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ cx-ay &=& bc\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& \frac{-bc}{a}\end{array}\right.\end{aligned}$$
Ainsi les coordonnées de l'orthocentre sont $\left(0;\frac{-bc}{a}\right)$.
5. Il reste à calculer les coordonnées de chaque vecteur :
$$\begin{aligned}\vec{\Omega H}&=\left(0-\frac{b+c}{2},\frac{-bc}{a}-\frac{a^2+bc}{2a}\right)\\ &=\left(-\frac{b+c}{2},-\frac{a^2+3bc}{2a}\right)\\ \vec{\Omega G}&=\left(\frac{b+c}{3}-\frac{b+c}{2},\frac{a}{3}-\frac{a^2+bc}{2a}\right)\\ &=\left(-\frac{b+c}{6},\frac{-a^2-3bc}{6a}\right)\end{aligned}$$
On voit que $\vec{\Omega H}=3\vec{\Omega G}$; ainsi ces vecteurs sont colinéaires, et les points Ω, H et G sont donc alignés.