DM 7

À rendre le 15 mars

Exercice 1

Soit $a > 0$ fixé, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ ainsi que de $g : x \mapsto f(x) - x$.
3. Démontrer avec soin que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq \sqrt{a}$; en déduire que $\forall n \geq 1,\ u_n \geq \sqrt{a}$.
4. Déterminer le comportement de la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, puis montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
   a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. *(On reconnaîtra des identités remarquables.)*
   b) En déduire une expression de v_n en fonction de v_0 et n.
   c) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
   d) Montrer que pour $n \geq 1$, $u_n - \sqrt{a} \leq M v_0^{2^n}$ avec $M = 2\max(u_0, u_1)$.
   e) Trouver un rang n à partir duquel on a $u_n - \sqrt{a} \leq 10^{-N}$ pour N fixé.
   f) On prend $u_0 = 2$ et $a = 2$; quelle valeur de n trouve-t-on pour une approximation à 10^{-3} près ? À 10^{-10} près ? 10^{-100} ? 10^{-200} ?

Exercice 2

Soit $f(x) = (x^2 - 1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
2. Démontrer que f est impaire sur $\mathcal{D}$. *Dans la suite de l'exercice on pose $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cap \mathbb{R}^+$.*
3. Montrer que f est continue sur $\mathcal{E}$.
4. Montrer que $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe et calculer sa valeur. *On posera ℓ cette limite ; dans la suite du problème, on suppose qu'on a posé $f(1) = \ell$.*
5. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathcal{E}$ et calculer f' sur cet ensemble.
6. Étudier le signe de la fonction auxiliaire g définie sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ par

$$g(x) = \frac{f'(x)}{2x}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad g(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}$$

   On notera a l'unique point d'annulation de g sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ sans chercher à déterminer sa valeur exacte.
7. Dresser un tableau de variations de la fonction f.

Correction de l'exercice 1

1. La suite est définie si on n'a jamais $u_n = 0$. En fait, vu que $u_0 > 0$ et que $a > 0$ et vu la formule donnant u_{n+1}, on va même montrer que $u_n > 0$. Montrons ainsi par récurrence que u_n existe et $u_n > 0$.
   - Initialisation : $u_0 > 0$.
   - Hérédité : supposons $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$. u_{n+1} est définie car $u_n > 0$ (donc $f(u_n)$ existe). On a de plus $\frac{a}{u_n} > 0$ car $a > 0$ et $u_n > 0$. Ainsi $u_n + \frac{a}{u_n} > 0$, puis $u_{n+1} > 0$ car $\frac{1}{2} > 0$.

   La propriété est démontrée par récurrence : la suite est bien définie et est strictement positive.
2. Notons qu'on peut se contenter d'étudier les variations de f et g sur $\mathbb{R}^{+*}$ car d'après la question précédente on a $u_n \in \mathbb{R}^{*+}$. On a
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$
   Cette fonction est positive si et seulement si $x^2 - a$ l'est, c'est-à-dire sur $]\sqrt{a}; +\infty[$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0; \sqrt{a}[$ et strictement croissante sur $]\sqrt{a}; +\infty[$. (En $\sqrt{a}$, elle vaut $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a}$, et sa limite en 0 et $+\infty$ est $+\infty$.) Quant à g, on a
$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{a}{x^2}\right) < 0$$
   Ainsi g est strictement décroissante. Sa limite en 0 est $+\infty$, et sa limite en $+\infty$ est $-\infty$; son seul point d'annulation est en $\sqrt{a}$.
3. D'après l'étude de variations de f, f est strictement décroissante sur $[0; \sqrt{a}[$; ainsi pour tout $x \in [0; \sqrt{a}[,\ f(x) > f(\sqrt{a})$ et donc $f(x) > \sqrt{a}$. De plus f est strictement croissante sur $]\sqrt{a}; +\infty[$; ainsi pour tout $x \in]\sqrt{a}; +\infty[,\ f(\sqrt{a}) < f(x)$ et donc $f(x) > \sqrt{a}$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq \sqrt{a}$ avec égalité uniquement si $x = \sqrt{a}$. Comme u_{n+1} est définie comme une valeur de f, on a que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq \sqrt{a}$.
4. On sait que f est croissante sur $]\sqrt{a}; +\infty[$; ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone. Comme de plus $g(x) \leq 0$ sur $]\sqrt{a}; +\infty[$, on sait alors que $f(u_{n+1}) < u_{n+1}$, et donc que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Comme $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$, elle est aussi minorée : elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

   Soit ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ car la fonction f est continue. Ainsi $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. La seule possibilité est $\ell = \sqrt{a}$; ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.
5. a) On écrit
$$\begin{aligned} v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} &= \frac{u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}}{u_n + \frac{a}{u_n} + 2\sqrt{a}} \\ &= \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}} \\ &= \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = v_n^2 \end{aligned}$$

   b) On peut écrire
$$v_n = v_{n-1}^2 = v_{n-2}^4 = v_{n-3}^8$$

Ainsi on a $v_n = v_0^{2^n}$ (ce qui peut éventuellement être démontré par récurrence). [Une autre possibilité est de montrer que la suite $(\ln v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison 2.]

c) On s'intéresse à $v_0 = \frac{u_0-\sqrt{a}}{u_0+\sqrt{a}}$; si $|v_0| \leq 1$ on a que $v_0^{2^n}$ tend vers 0, et si $|v_0| \geq 1$ elle tend vers $+\infty$. Ainsi

$$\begin{aligned} |v_0| \leq 1 &\Leftrightarrow |u_0 - \sqrt{a}| \leq |u_0 + \sqrt{a}| \\ &\Leftrightarrow |u_0 - \sqrt{a}| \leq u_0 + \sqrt{a} \end{aligned}$$

Or la dernière inégalité est une conséquence de l'inégalité triangulaire pour les valeurs absolues ; ainsi $v_0 < 1$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers 0.

d) On a

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{a} &= \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \times (u_n + \sqrt{a}) \\ &= v_n \times (u_n + \sqrt{a}) \\ &= v_0^{2^n} \times (u_n + \sqrt{a}) \end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, et donc $u_n \leq u_1$; de plus, on sait que $u_1 \geq \sqrt{a}$, et donc $u_1 + \sqrt{a} \leq 2u_1$. Enfin, $u_1 \leq \max(u_0, u_1)$, d'où $u_n \leq M v_0^{2^n}$.

e) Si on veut être sûrs que $u_n - \sqrt{a} \leq 10^{-N}$, il suffit de trouver un n tel que $M v_0^{2^n} \leq 10^{-N}$. On a alors

$$\begin{aligned} M v_0^{2^n} \leq 10^{-N} &\Leftrightarrow \ln M + 2^n \ln v_0 \leq -N \ln 10 \\ &\Leftrightarrow \ln M + N \ln 10 \leq 2^n |\ln v_0| \qquad \text{car } \ln(v_0) < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln M + N \ln 10}{|\ln v_0|} \leq 2^n \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(\ln M + N \ln 10) - \ln|\ln v_0|}{\ln 2} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre la partie entière plus un du membre de droite.

f) $u_0 = 2$, et lorsque que l'on fait le calcul, on trouve $u_1 = \frac{3}{2}$; ainsi $u_0 > u_1$ et $M = 4$. De plus $\frac{u_0-\sqrt{2}}{u_0+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \simeq 0.171$. L'application numérique donne successivement $n = 4$, $n = 5$, $n = 8$, $n = 9$.

Conclusion de l'exercice : cette suite tend vers $\sqrt{a}$ très rapidement, et le nombre de décimales exactes est à peu près doublé à chaque itération. Cet algorithme est utilisé lorsque l'on veut calculer $\sqrt{a}$ avec beaucoup de chiffres de précision ; il était déjà connu dans l'Antiquité, et porte le nom d'Héron d'Alexandrie.

Correction de l'exercice 2

Soit

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

1. La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ n'est pas définie en 1. De plus, la fonction logarithme népérien est définie sur $]0, +\infty[$; ainsi, la fonction n'est pas définie si $\frac{1+x}{1-x} = 0$, c'est à dire pour $x = -1$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. On écrit

$$\begin{aligned} f(-x) &= ((-x)^2-1)\ln|\frac{1+(-x)}{1-(-x)}| \\ &= (x^2-1)\ln|\frac{1-x}{1+x}| \\ &= (x^2-1)\times\left(-\ln|\frac{1+x}{1-x}|\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

La fonction est donc bien impaire. On a $\mathcal{E} = [0,1[\cup]1,+\infty[$.

3. f est continue sur $\mathcal{E}$ en tant que produit, quotient et composée de fonctions continues.

4. On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-1)\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right) \\ &= (x^2-1)\ln|1+x| + (x+1)\times(1-x)\ln|1-x| \end{aligned}$$

Si on pose $y = 1-x$, le deuxième terme est $(x+1)\times y\ln|y|$; or $\lim_{y\to 0} y\ln|y| = 0$ par croissances comparées. Ainsi

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0\times\ln(2) + 2\times 0 = 0$$

f a donc une limite finie en 1 ; elle est donc prolongeable par continuité en 1, et on pose $f(1) = 0$.

5. La fonction $x \to x^2-1$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. La fonction ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, $]0,+\infty[$. La seule difficulté provient du fait que $x\to|x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0 ; or, les valeurs de x pour lesquelles $|\frac{1+x}{1-x}| = 0$ n'appartiennent pas à E car ln n'est pas définie en 0. Ainsi f est dérivable sur E. Pour calculer sa dérivée, on se souvient que, sur E, la dérivée de la valeur absolue est 1 ; ainsi

$$\begin{aligned} \left(|\frac{1+x}{1-x}|\right)' &= \frac{1\times(1-x)-(1+x)\times(-1)}{(1-x)^2}\times 1 \\ &= \frac{2}{(1-x)^2} \\ \left(\ln|\frac{1+x}{1-x}|\right)' &= \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} \\ &= \frac{2}{1-x^2} \\ f'(x) &= 2x\ln|\frac{1-x}{1+x}| + (x^2-1)\times\frac{2}{1-x^2} \\ &= 2x\ln|\frac{1-x}{1+x}| - 2 \end{aligned}$$

6. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathcal{E}\setminus\{0\}$. On calcule sa dérivée : [l'avantage d'avoir fait étape par étape à la question précédente est de pouvoir réutiliser des blocs de base]

$$g'(x) = \frac{2}{(1-x^2)} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2+(1-x^2)}{(1-x^2)x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(1-x^2)}$$

Le numérateur étant toujours positif, il faut étudier le signe du dénominateur, et plus précisément de $1 - x^2$; le dénominateur est positif sur $]0, 1[$ et négatif sur $]1, +\infty[$. Donc g est croissante sur $]0, 1[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$. On peut faire un tableau de variations. On a $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Pour la limite en 1, on écrit $g(x) = \ln|1 + x| - \ln|1 - x| - \frac{1}{x}$, donc

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 1 - \lim_{x\to 1} \ln|1 - x| - 1 = +\infty$$

On voit une unique annulation entre 0 et 1.

7. On a $f'(x) = g(x) \times 2x$ sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$. Or g s'annule une fois en $\alpha \in]0, 1[$; g est négative sur $]0, \alpha[$ et positive ailleurs. On peut dresser le tableau de variations de f ; on voit que f a un minimum en α, et on peut même calculer $f(\alpha)$:

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right| = \frac{1}{\alpha}$$
$$f(\alpha) = (\alpha^2 - 1) \times \ln\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right| = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$$