DM 8

À rendre le 12 avril

Exercice 1

On étudie la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{(x^2+1)\arctan x}{x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la parité de f.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de arctan en 0.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement (que l'on notera encore f) est dérivable en 0. Donner $f(0)$ et $f'(0)$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T_0 en 0 à $\mathcal{C}_f$, ainsi que la position relative de T_0 et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.
5. Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telle que $u(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ est constante et préciser la valeur de cette constante.
6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote Δ en $+\infty$. On donnera une équation de Δ et on précisera la position relative de Δ et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. *(On posera $h = \frac{1}{x}$ et on utilisera les questions 2 et 5.)*
7. Étudier les variations de la fonction $h(x) = \arctan(x) + \frac{x}{x^2-1}$.
8. En déduire le tableau de variations de f.
9. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ en faisant apparaître les différents éléments obtenus.

Exercice 2

Donner la limite en 0^+, ainsi qu'un équivalent simple, de

$$v(x) = \frac{x^3}{\ln(1+x^2) - x\sin(x)}.$$

Correction de l'exercice 1

1. On a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2+1)\arctan(-x)}{(-x)} \\ &= \frac{-(x^2+1)\arctan(x)}{-x} = f(x) \end{aligned}$$

car $x \mapsto \arctan(x)$ est impaire (car tan est impaire et la réciproque d'une fonction impaire est impaire). Ainsi f est paire.

2. Deux méthodes :
   - Première méthode : on sait que la dérivée de arctan est $\frac{1}{1+t^2}$. Or

   $$\begin{aligned} \frac{1}{1+t} &= 1-t+t^2+o(t^2) \\ \frac{1}{1+t^2} &= 1-t^2+t^4+o(t^4) = 1-t^2+o(t^2) \end{aligned}$$

   par troncature. Comme on peut "intégrer les développments limités", on a

   $$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

   - Deuxième façon : on calcule les trois premières dérivées de arctan et on utilise la formule de Taylor-Young. On a

   $$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \\ \arctan''(x) &= -1 \times 2x \times (1+x^2)^{-2} \\ \arctan'''(x) &= -2(1+x^2)^{-2} - 2x \times (-2) \times 2x \times (1+x^2)^{-3} \end{aligned}$$

   Ainsi $\arctan'(0) = 1$, $\arctan''(0) = 0$, $\arctan'''(0) = -2$. On applique ensuite la formule de Taylor-Young au voisinage de 0 (on peut car arctan est $\mathcal{C}^\infty$ car sa dérivée l'est) :

   $$\begin{aligned} \arctan(x) &= \arctan(0) + x\arctan'(0) + \frac{x^2}{2!}\arctan''(0) + \frac{x^3}{3!}\arctan'''(0) + o(x^3) \\ &= 0 + x + 0 - \frac{2}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

3. Pour calculer la limite en 0 on fait un développement limité en 0 de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2+1)(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))}{x} \\ &= \frac{x^3+o(x^3)+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x} \\ &= 1+\frac{2}{3}x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, une limite finie ; la fonction est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. En ce qui concerne la dérivabilité en 0 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}x + o(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4. L'équation de la tangente à f en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Ici comme $f'(0) = 0$ et $f(a) = 1$, on obtient que l'équation de la tangente est $y = 1$. Pour déterminer la position relative de ces deux courbes, on fait la différence entre les deux :

$$f(x) - 1 = 1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2) - 1 = -\frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$$

Comme $\frac{2}{3}x^2 > 0$, la courbe est au-dessus de la tangente.

5. Pour montrer que la fonction est constante, on va montrer que sa dérivée est nulle. La fonction u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme et composée de fonction continues et dérivables ; le dénominateur présent dans u ne s'annnule pas sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi

$$\begin{aligned}u'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\end{aligned}$$

Ainsi la fonction u est constante. Pour déterminer sa valeur on regarde sa valeur en un point particulier, par exemple 1 : on a $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ (car $\frac{\pi}{4}$ est l'unique réel dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = 1$), donc $u(1) = \arctan 1 + \arctan\frac{1}{1} = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $u(x) = \frac{\pi}{2}$.

6. Pour montrer que $\mathcal{C}_f$ a une asymptote en $+\infty$ on va faire un développement asymptotique de f en $+\infty$. Pour cela, on pose $h = \frac{1}{x}$; quand x est au voisinage de $+\infty$, h est au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned}f(x) = f(\frac{1}{h}) &= \frac{\left(\frac{1}{h^2}+1\right)\arctan(\frac{1}{h})}{1/h} \\ &= h\left(\frac{h^2+1}{h^2}\right)\arctan(1/h) \\ &= \frac{h^2+1}{h}\arctan(1/h) \\ &= \frac{(h^2+1)(\pi/2-\arctan(h))}{h} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{h^2+1}{h} - \frac{(h^2+1)\arctan(h)}{h} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{h^2+1}{h} - f(h)\end{aligned}$$

Comme h est au voisinage de 0, on peut réutiliser le développement limité de la question 3, et on obtient :

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{h}) &= \frac{\pi}{2}\frac{h^2+1}{h} - 1 + \frac{2}{3}h^2 + o(h^2) \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{h} - 1 + \frac{\pi}{2}h + \frac{2}{3}h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

On peut maintenant repasser aux notations avec du x :

$$f(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{\pi}{2x} + \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (\frac{\pi}{2}x-1) = 0$: la droite Δ : $\frac{\pi}{2}x - 1$ est ashmptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. De plus, comme $\frac{\pi}{2x} > 0$, la courbe est au-dessus de la droite.

7. Cette fonction est définie partout où $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. De plus elle est continue et dérivable en tant que somme de fonctions dérivables. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1\times(x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} h'(x) \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x^2)^2} \leq \frac{1}{(1-x^2)^2} \\ &\Leftrightarrow (1+x^2)^2 \geq (1-x^2)^2 \qquad \text{par décroissance de l'inverse} \\ &\Leftrightarrow |1+x^2| \geq |1-x^2| \qquad \text{par croissance de la racine carrée} \\ &\Leftrightarrow 1+x^2 \geq |1-x^2| \qquad \text{car } 1+x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si $x \leq 1$, on a $1 - x^2 \geq 0$, donc c'est équivalent à $1 + x^2 \geq 1 - x^2$, ce qui est toujours vrai. Si $x \geq 1$, on a $|1 - x^2| = x^2 - 1$, et l'inégalité est équivalente à $1 + x^2 \geq x^2 - 1$, c'est-à-dire $1 \geq -1$: c'est encore une fois toujours vrai. Ainsi, h' est négative sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, et donc h est décroissante sur $]-\infty; -1[$, sur $]-1; 1[$, et sur $]1, +\infty[$. On construit le tableau de variations (en n'oubliant pas les valeurs interdites) ; il ne reste que le calcul des limites :

— $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$. En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

et ce car $\arctan(0) = 0$ et $x \mapsto \arctan(x)$ est continue en 0. Enfin, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$ par croissances comparées.

— Avec des arguments similaires, $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\frac{\pi}{2}$, par imparité de la fonction arctan (et même par imparité de h).

— $\lim_{x\to1^+} x^2 - 1 = 0^+$, donc $\lim_{x\to1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$. Ainsi $\lim_{x\to1^+} h(x) = +\infty$.

— $\lim_{x\to-1^-} x^2 - 1 = 0^+$, donc $\lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$. Ainsi $\lim_{x\to1^+} h(x) = -\infty$.

— $\lim_{x\to-1^+} x^2 - 1 = 0^-$ donc $\lim_{x\to-1^+} h(x) = +\infty$; de même $\lim_{x\to1^-} h(x) = -\infty$.

8. On peut essayer de dériver f sur $\mathbb{R}^{+*}$, pour voir si h a un rapport avec f' :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x^2+1}{x}\arctan(x)\right)' \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)'\arctan(x) + \frac{x^2+1}{x}\frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x} + \arctan(x) - \frac{\arctan(x)}{x^2}\end{aligned}$$

On a

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \arctan(x)\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \geq 0$$

Or $\arctan(x) = h(x) - \frac{x}{x^2-1}$ donc

$$\begin{aligned}f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{x} + h(x)\frac{x^2-1}{x^2} - \frac{x}{x^2-1}\frac{x^2-1}{x^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow h(x)\frac{x^2-1}{x^2} \geq 0\end{aligned}$$

On sait que h est positive sur $]1;+\infty[$, et $\frac{x^2-1}{x^2}$ aussi ; ainsi $f'(x) \geq 0$ sur $]1;+\infty[$. De plus, comme $h(0) = -1$ et $\lim_{x\to 1^-} h(x) = -\infty$, et que h est décroissante, on a que $h(x) \leq 0$ sur cet intervalle ; comme $\frac{x^2-1}{x^2} \leq 0$, on a que $f'(x) \geq 0$. Enfin, en 1, l'expression de f' montre qu'elle est égale à 1 ; ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) \geq 0$, et f est croissante. D'après la question 1, comme f est impaire, elle est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

9. Il faut faire apparaître sur la courbe :
   - $f(0) = 1$;
   - $f'(0) = 0$;
   - Le fait que la fonction soit décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$;
   - Le fait qu'il y ait une asymptote en $+\infty$ d'équation $\frac{\pi}{2}x - 1$ et que f est au-dessus de cette asymptote ;
   - L'asymptote en $-\infty$, qui peut s'obtenir par symétrie grâce à l'imparité de f (son équation est $y = -\frac{\pi}{2} - 1$).

Correction de l'exercice 2

On fait un développement limité, mais on peut se demander à quel ordre. Si on veut diviser par x^3, il faut qu'il y ait au moins du x^3 ; comme il y a du x^2 dans le ln, on peut penser à un DL d'ordre 2 de $\ln(1+x^2)$ pour obtenir des $o(x^4)$, et un DL d'ordre 3 de $\sin(x)$ (ce qui donnera aussi du x^4 avec le x devant). On obtient :

$$\begin{aligned}\ln(1+x^2) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \ln(1+x^2) - x\sin(x) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^4}{3} + o(x^4)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{x^3}{\ln(1+x^2) - x\sin(x)} = \frac{1}{-\frac{x}{3} + o(x)}$$

Le dénominateur tendant vers $0-$ en 0^+, la limite est $-\infty$; un équivalent simple est $\frac{1}{-\frac{x}{3}} = -\frac{3}{x}$.