DM 9

À rendre le 24 mai

Exercice 1

On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) &\mapsto (-2y+3z+t, -x-2y+3z+t, -x+2z+t) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. a) Déterminer une famille génératrice, puis une base de $\operatorname{Ker} f$. Que vaut $\dim \operatorname{Ker} f$?
   b) f est-elle injective ? Si oui, pourquoi ? Si non, donner un contre-exemple.
3. a) Déterminer une famille génératrice, puis une base de $\operatorname{Im} f$. Que vaut $\operatorname{rg} f$?
   b) f est-elle surjective ? Si oui, pourquoi ? Si non, donner un contre-exemple.
4. Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$. On notera cette matrice M_1.
5. a) On pose

$$u_1 = (1,0,0,0), \qquad u_2 = (1,1,0,0), \qquad u_3 = (1,1,1,0), \qquad u_4 = (1,1,1,1)$$
$$v_1 = (1,1,0), \qquad v_2 = (1,0,0), \qquad v_3 = (0,2,1)$$

   Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et que $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ en fonction des v_i.
   c) Donner la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On notera cette matrice M_2.
6. On pose U la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des u_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et V la matrices dont les colonnes sont les coordonnées des v_i dans $\mathbb{R}^3$.
   a) Calculer M_1U et VM_2.
   b) Calculer V^{-1}, puis exprimer M_2 en fonction de M_1.

Exercice 2

Soit $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$. Calculer $\int \frac{dx}{P(x)}$. *(On commencera par factoriser le dénominateur, puis on tentera de décomposer la fraction autant que possible en déguisant 1 au numérateur plusieurs fois de suite.)*

Correction de l'exercice 1

1. Il y a deux choses à montrer :
   - Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et $(x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}
&f(x+x',y+y',z+z',t+t')\\
&=(-2(y+y')+3(z+z')+(t+t'),-(x+x')-2(y+y')+3(z+z')+(t+t'),\\
&\qquad -(x+x')+2(z+z')+(t+t'))\\
&=(-2y+3z+t-2y'+3z'+t',-x-2y+3z+t-x'-2y'+3z'+t',\\
&\qquad -x+2z+t-x'+2z'+t')\\
&=f(x,y,z,t)+f(x',y',z',t')
\end{aligned}$$

   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda x,\lambda y,\lambda z,\lambda t) &= (-2\lambda y+3\lambda z+\lambda t,-\lambda x-2\lambda y+3\lambda z,-\lambda x+2\lambda z+\lambda t)\\
&= \lambda(-2y+3z+t,-x-2y+3z,-x+2z+t) = \lambda f(x,y,z,t)
\end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire.

2. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in \operatorname{Ker} f &\Leftrightarrow f(x,y,z,t)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2y+3z+t &=0\\ -x-2y+3z+t &=0\\ -x+2z+t &=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2y+3z+t &=0\\ -x &=0\\ -x+2z+t &=0\end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2y+z &= 0\\ -x &= 0\\ t &= -2z\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0\\ y = \frac{z}{2}\\ t = -2z\end{cases}\\
&\Leftrightarrow (x,y,z,t)=(0,\frac{z}{2},z,2z)=z(0,\frac{1}{2},1,-2)
\end{aligned}$$

   Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(0,\frac{1}{2},1,-2)$; la famille constituée uniquement de ce vecteur est donc une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$. Comme ce vecteur n'est pas nul, cette famille est libre ; en effet $\lambda(0,\frac{1}{2},1,-2)=(0,0,0,0)$ implique $\lambda=0$. Ainsi une base de $\operatorname{Ker} f$ est $(0,\frac{1}{2},1,-2)$, et $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = 1$.

   f n'est pas injective car

$$f(0,1/2,1,2)=(-1+3-2,0-1+3-2,-0+2-2)=(0,0,0)=f(0,0,0,0)$$

3) a) On a

$$\begin{aligned}
u\in \operatorname{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ tq } u=(-2y+3z+t,-x-2y+3z+t,-x+2z+t)\\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ tq } u=x(0,-1,-1)+y(-2,-2,0)+z(3,3,2)+t(1,1,1)\\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ tq } u\in \operatorname{Vect}((0,-1,-1),(-2,-2,0),(3,3,2),(1,1,1))
\end{aligned}$$

Ainsi $((0,-1,-1),(-2,-2,0),(3,3,2),(1,1,1))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. On pourrait voir si elle est libre, mais comme c'est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle a trop de vecteurs pour être libre. Il faudrait donc retirer des vecteurs pour en faire une base de $\operatorname{Im} f$; oui, mais combien ? Et c'est hors-programme... Donc le mieux est encore de calculer son rang :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}((0,-1,-1),(-2,-2,0),(3,3,2),(1,1,1)) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Im} f$ est de dimension 3 ; mais comme $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ et que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$, on a en fait $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. On peut prendre comme base la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par exemple : $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

b) La fonction est surjective car $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

4. Les colonnes de cette matrice sont les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ dans $\mathcal{B}'$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$, où $(e_1,e_2,e_3,e_4) = \mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$f(1,0,0,0) = (0,-1,-1), \qquad f(0,1,0,0) = (-2,-2,0), \qquad f(0,0,1,0) = (3,3,2), \qquad f(0,0,0,1) =$$

Ainsi

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. a) La famille des u_i est constituée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$; pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^4$ tels que $\sum_{i=1}^4 \lambda_i u_i = (0,0,0,0)$. Alors

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4, \lambda_3+\lambda_4, \lambda_4) = (0,0,0,0) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce système est triangulaire supérieur avec uniquement des 1 sur la diagonale : il est donc de rang 4 (de Cramer) et il a donc une unique solution. Comme il est homogène, la solution nulle est l'unique solution, et la famille est donc libre ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Pour ce qui est de la famille des v_i, on a 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (qui est de dimension 3), donc il suffit encore une fois de montrer qu'elle est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i = (0,0,0)$. On obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En remontant on obtient $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$; ainsi la famille est libre, et c'est donc une base.

b) Pour déterminer les coefficients dans la combinaison linéaire qui donne chaque vecteur de la base, on peut résoudre $(1,0,0) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i$, puis la même chose avec $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Ici, on peut y arriver plus directement, en tirant parti de la forme des vecteurs :

— $(1,0,0) = 0 \times v_1 + 1 \times v_2 + 0 \times v_3$;

— On veut $(0,1,0)$: on remarque que v_1 a un 1 en 2ème position, mais il faut se débarrasser du 1 en 1ère position, ce qu'on fait en retranchant v_2 : $(0,1,0) = 1 \times v_1 - 1 \times v_2 + 0 \times v_3$.

— Enfin, on veut arriver à $(0,0,1)$; il y a un 1 en 3ème position de v_3, mais il faut enlever 2 fois $(0,1,0)$; ainsi $(0,0,1) = -2 \times v_1 + 2 \times v_2 + v_3$.

c) Il faut pour cela calculer l'image des u_i dans la base v_i. Commençons par calculer $f(u_i)$ dans la base canonique :

$$\begin{aligned}
f(u_1) &= (0,-1,-1) \\
f(u_2) &= (-2,-3,-1) \\
f(u_3) &= (1,0,1) \\
f(u_4) &= (2,1,2)
\end{aligned}$$

On peut ensuite décomposer chacun de ces vecteurs avec des vecteurs de la base canonique et utiliser la question précédente :

$$\begin{aligned}
f(u_1) &= (0,-1,-1) = -(0,1,0) - (0,0,1) \\
&= 1 \times v_1 - 1 \times v_2 - 1 \times v_3 \\
f(u_2) &= -2(0,0,1) - 3(0,1,0) - 1(0,0,1) \\
&= -2v_2 - 3(v_1 - v_2) - (-2v_1 + 2v_2 + v_3) \\
&= -v_1 - v_2 - v_3 \\
f(u_3) &= (1,0,0) + (0,0,1) = -2v_1 + 3v_2 + v_3 \\
f(u_4) &= 2(1,0,0) + (0,1,0) + 2(0,0,1) \\
&= 2v_2 + (v_1 - v_2) + 2(-2v_1 + 2v_2 + v_3) \\
&= -3v_1 + 5v_2 + 2v_3
\end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. a) Il s'agit simplement de faire le calcul :

$$M_1 U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que $M_1 U = V M_2$.

b) Pour inverser la matrice, on inverse le système $V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$:

$$V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & a\\ x+ \quad 2z & = & b\\ z & = & c\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & a-b+2c\\ x & = & b-2c\\ z & = & c\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Ainsi $V^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On a alors

$$M_1U = VM_2 \Leftrightarrow V^{-1}M_1U = M_2 \qquad \text{en multipliant à gauche par } V^{-1}$$
$$\Leftrightarrow M_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times M_1 \times \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2

Commençons par factoriser le polynôme $P = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$.

— 0 n'est pas racine évidente ;

— 1 est racine simple. On a

$$\begin{aligned} P' &= 4X^3 - 3X^2 - 6X + 5\\ P'(1) &= 4 - 9 + 5 = 0\\ P'' &= 12X^2 - 6X - 6\\ P''(1) &= 12 - 12 = 0\\ P''' &= 24X - 6\\ P'''(1) &= 18 \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi 1 est racine triple de P.

— -1 n'est pas racine simple de P.

À ce stade-là on a $P = (X-1)^3Q$; puisque $\deg P = 4$ on a $\deg Q = 1$. Par identification des coefficients dominants on a $Q = X+\alpha$; par identification des coefficients constants on a $1^3\times\alpha = -2$ donc $Q = X - 2$. Ainsi

$$P = (X-1)^3(X-2)$$

Revenons sur la primitive :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-1)^3(x-2)}dx &= \int \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^3(x-2)}dx \\
&= \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx - \int \frac{1}{(x-1)^3}dx \\
&= \int \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2(x-2)}dx + \frac{1}{2(x-1)^2} \\
&= \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \frac{1}{2(x-1)^2} \\
&= \int \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)}dx + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} \\
&= \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} \\
&= \ln\frac{|x-2|}{|x-1|} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2}
\end{aligned}$$