DS 01 - 27 septembre

Durée : 3h. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Questions de cours

1. Calculer $(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et le démontrer).
2. a) En quoi consiste l'étape d'hérédité d'une récurrence simple ? Que doit-on prouver dans l'étape d'initialisation ?
   b) Même question pour la récurrence double et la récurrence forte.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x\sin(x) - 3\sqrt{x}\cos(x)}{x^4+2x-4}$. Dans tout ce qui suit on suppose $x \geq 2$.

1. Montrer que $x^4 \geq 8x$.
2. En déduire que $x^4 + 2x - 4 \geq 8x$.
3. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x||y|$.
4. Comparer x et $\sqrt{x}$ et prouver que $|x\sin(x) - 3\sqrt{x}\cos(x)| \leq 4x$.
5. En déduire un majorant de $|f(x)|$ lorsque $x \in [2; +\infty[$.

Exercice 2

Soient A, B, C trois ensembles.

1. Montrer que « $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$ » $\Leftrightarrow B = C$.
2. Montrer que « $A \cup B = A \cap C$ et $A \cup C = A \cap B$ » $\Leftrightarrow A = B = C$.

Exercice 3

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0$$

1. Déterminer le domaine de définition de cette équation.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ rappeler un encadrement de a en fonction de $\lfloor a \rfloor$.
3. Montrer que résoudre l'équation est équivalent à résoudre deux inéquations que l'on déterminera.
4. Résoudre les deux inéquations de la question précédente.
5. Résoudre l'équation de départ.

Exercice 4

Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a \leq b$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} & = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Déterminer ces deux suites ainsi que leur limite dans les cas suivants : $a = b$; $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}^+$.

On revient au cas général et on souhaite montrer que ces suites convergent vers une même limite.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis et positifs.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq v_{n+1}$. *(On utilisera une identité remarquable.)*
4. A-t-on $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$?
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq b$, et $v_n \geq a$. Que peut-on en déduire ?
7. Calculer $v_{n+1} - u_n$, puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$. Que peut-on en déduire ?
8. Dans ce qui suit, on prend $a = 1$ et $b = 2$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ (\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2 \geq 4$.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{2k+3}}$$
   (On commencera par démontrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $a \geq 0$, $\sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$.)
   c) Trouver une valeur de n telle que $v_n - u_n \leq 2^{-100}$.

Question de cours

1. $(-1)^n = 1$ si n pair, -1 si n impair ; se montre par récurrence ou en écrivant $((-1)^2)^k$.
2. a) Dans l'hérédité d'une récurrence simple on suppose que la propriété est vraie au rang n et on la montre au rang $n+1$. On doit prouver que la propriété est vraie au premier rang (en général au rang 0) dans l'initialisation.

   b) Pour une récurrence double, il faut prouver la propriété pour les deux premiers rangs (en général 0 et 1) dans l'initialisation, et supposer que la propriété est vraie au rang n et $n+1$ pour la prouver au rang $n+2$. Pour la récurrence forte, l'initialisation est la même que pour une récurrence simple, mais l'hérédité se fait en supposant la propriété vraie pour tout $k \leq n$.

Correction de l'exercice 1

1. On a $\forall x \geq 2$ que $x^3 \geq 2^3 = 8$, car la fonction $x \to x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée, $3x^2$ est toujours positive). Puisqu'on suppose $x \geq 2$ (et donc > 0) on peut multiplier cette inégalité par x sans en changer le sens ; on a ainsi $x^4 \geq 8x$.
2. Il suffit de montrer que $2x - 4 \geq 0$; en effet on aura alors $x^4 \leq x^4 + (2x-4)$ et comme $x^4 \geq 8x$ on aura ce qu'on veut. Or $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, ce qui est notre supposition ; ainsi la propriété est vérifiée.
3. Il y a deux méthodes :
   - Par disjonction de cas :
     - Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $xy \geq 0$ et $|xy| = xy$; de plus $|x| = x$ et $|y| = y$, donc l'égalité est vérifiée.
     - Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, $xy \leq 0$ et $|xy| = -xy$; de plus $|x| = x$ et $|y| = -y$, donc l'égalité est vérifiée (car $x \times (-y) = -xy$).
     - Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, $xy \leq 0$ et $|xy| = -xy$; de plus $|x| = -x$ et $|y| = y$, donc l'égalité est vérifiée.
     - Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, $xy \geq 0$ et $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.
   - On a $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \sqrt{x^2}$. Ainsi

     $$|xy| = |x||y| \Leftrightarrow \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2}$$

     Cette égalité est vraie car $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ pour tous a, b positifs (car ces nombres ont le même carré, ab, et sont donc égaux par définition de la racine carrée).
4. Soit $g(x) = x - \sqrt{x}$, définie pour $x \geq 2$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée est $g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Pour $x \geq 2$ cette dérivée est positive ; en effet

   $$\begin{aligned} x \geq 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{2} && \text{par croissance de } x \to \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x} \geq 2\sqrt{2} && \text{car } 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} && \text{car } x \to \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } [\frac{1}{2\sqrt{2}}; +\infty[\end{aligned}$$

   et $\frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$ car $2\sqrt{2} > 1$ (car $8 > 1$). Ainsi la fonction g est croissante, donc $g(x) \geq g(2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; mais $g(2) = 2 - \sqrt{2} > 0$ (car $4 > 2$), donc $g(x) > 0$. Ainsi $x > \sqrt{x}$.

Pour ce qui est du reste de la question, on écrit

$$\begin{aligned}
|x\sin(x) - 3\sqrt{x}\cos(x)| &\leq |x\sin(x)| + |3\sqrt{x}\cos(x)| && \text{par l'inégalité triangulaire}\\
&\leq x|\sin(x)| + 3\sqrt{x}|\cos(x)| && \text{car } x > 0\\
&\leq x|\sin(x)| + 3x|\cos(x)| && \text{d'après la question précédente}\\
&\leq x + 3x = 4x && \text{car } |\cos(x)| \leq 1 \text{ et } |\sin(x)| \leq 1
\end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \frac{|x\sin(x) - 3\sqrt{x}\cos(x)|}{|x^4 + 2x - 4|}\\
&\leq 4x \times \frac{1}{|x^4 + 2x - 4|}
\end{aligned}$$

Or d'après la question 2 $x^4 + 2x - 4 \geq 8x > 0$, donc $|x^4 + 2x - 4| = x^4 + 2x - 4$; de plus, $\frac{1}{x^4+2x-4} \leq \frac{1}{8x}$ par décroissance de $x \to \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc

$$|f(x)| \leq \frac{4x}{8x} \leq \frac{1}{2}$$

Correction de l'exercice 2

1. On raisonne par double implication. Tout d'abord, on note que l'implication $B = C \Rightarrow A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$ est évidente, car si $B = C$ on a $A \cup B = A \cup C$ et de même pour l'intersection. Supposons maintenant que $A \cup B = A \cup C$ et que $A \cap B = A \cap C$, et montrons que $B = C$. On procède par double inclusion :
   — Montrons que $B \subset C$. Soit $x \in B$. On a deux cas :
     — si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$; mais comme $A \cap B = A \cap C$, on a $x \in A \cap C$, et donc $x \in C$.
     — si $x \notin A$, alors puisque $x \in B$ on a $x \in A \cup B$, et donc $x \in A \cup C$; on a donc $x \in A$ ou $x \in C$, mais comme $x \notin A$ on a nécessairement $x \in C$.

     Au final $B \subset C$.
   — Le raisonnement précédent s'applique exactement de la même façon pour montrer qu'un $x \in C$ appartient alors à B. Ainsi $C \subset B$.

   Au final l'implication $\Rightarrow$ est démontrée.
2. De même qu'à la question précédente, on remarque que l'implication « de droite à gauche » est vérifiée, car si $A = B = C$ on a

$$A \cup B = A, \qquad A \cap C = A, \qquad A \cup C = A, \qquad A \cap B = A$$

   Supposons maintenant que $A \cup B = A \cap C$ et que $A \cup C = A \cap B$, et montrons que $A = B = C$. Commençons par montrer que $A = B$, par double inclusion :
   — Soit $x \in A$, montrons que $x \in B$. Puisque $x \in A$, $x \in A \cup C$; mais comme $A \cup C = A \cap B$, on a $x \in A \cap B$, et donc $x \in B$.
   — Soit $x \in B$, montrons que $x \in A$. Puisque $x \in B$, $x \in A \cup B$, et donc $x \in A \cap C$ ce qui montre que $x \in A$.

   Pour ce qui est de $A = C$, on écrit :
   — Soit $x \in A$: alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap C$ et du coup $x \in C$.
   — Soit $x \in C$: alors $x \in A \cup C$, donc $x \in A \cap B$ et au final $x \in A$.

   Ainsi $A = B$ et $A = C$ donc $A = B = C$.

Correction de l'exercice 3

1. La fonction partie entière étant définie sur $\mathbb{R}$, l'équation est définie dès que $2x-\sqrt{5x-1}$ est définie, c'est-à-dire dès que $5x-1\geq 0$. Ainsi, l'équation est définie pour $x\geq \frac{1}{5}$.
2. On a (question de cours) $\lfloor a\rfloor \leq a < \lfloor a\rfloor + 1$. Cette inégalité caractérise de plus la partie entière : c'est le seul entier vérifiant cette inégalité.
3. D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}\lfloor 2x-\sqrt{5x-1}\rfloor = 0 &\Leftrightarrow 0\leq 2x-\sqrt{5x-1}\rfloor < 1\\ &\Leftrightarrow 0\leq 2x-\sqrt{5x-1} \qquad \text{et} \qquad 2x-\sqrt{5x-1}<1\end{aligned}$$

4. Résolvons la première inéquation :

$$\begin{aligned}0\leq 2x-\sqrt{5x-1} &\Leftrightarrow \sqrt{5x-1}\leq 2x\\ &\Leftrightarrow 5x-1\leq 4x^2 \qquad \text{car } 5x-1>0 \text{ et car } x\to x^2 \text{ et } x\to\sqrt{x} \text{ sont croissantes sur } \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow 4x^2-5x+1\geq 0\end{aligned}$$

En étudiant le trinôme on trouve que son discriminant est $\Delta = 25-16 = 9$ et que ses racines sont $\frac{5-3}{8}=\frac{1}{4}$ et $\frac{5+3}{8}=1$. Comme la limite en $+\infty$ du trinôme est $+\infty$, le trinôme est positif sur $[1;+\infty[$, et donc négatif sur $[\frac{1}{4};1]$ et positif sur $]-\infty;\frac{1}{4}]$. Au vu de l'ensemble de définition de la racine carrée on a

$$2x-\sqrt{5x-1}\geq 0 \Leftrightarrow x\in[\frac{1}{5};\frac{1}{4}]\cup[1;+\infty[$$

Pour ce qui est de l'autre inéquation :

$$2x-\sqrt{5x-1}<1 \Leftrightarrow 2x-1<\sqrt{5x-1}$$

On ne peut pas mettre au carré directement car on ne connaît pas le signe de $2x-1$; il faut faire une disjonction de cas :

— si $x\geq\frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}0\leq 2x-1<\sqrt{5x-1} &\Leftrightarrow (2x-1)^2<5x-1 \qquad \text{car } 5x-1\geq 0 \text{ et } x\to x^2 \text{ et } x\to\sqrt{x} \text{ sont crois}\\ &\Leftrightarrow 4x^2+1-4x<5x-1\\ &\Leftrightarrow 4x^2-9x+2<0\end{aligned}$$

On étudie ce polynôme ; son discriminant est $\Delta = 81-32=49$, et ses racines sont donc $\frac{9-7}{8}=\frac{1}{4}$ et $\frac{9+7}{8}=2$. Ce polynôme a comme limite $+\infty$ en $+\infty$, donc il est positif sur $]-\infty;\frac{1}{4}]\cup[2;+\infty[$ et strictement négatif sur $]\frac{1}{4};2[$. Mais comme on suppose $x\geq\frac{1}{2}$, on a que $x\in[\frac{1}{2};2[$.

— si $x<\frac{1}{2}$, on a $2x-1<0$, et $\sqrt{5x-1}\geq 0$, donc cette inégalité est toujours vérifiée (tant que $5x-1\geq 0$). Ainsi l'inégalité est vérifiée sur $[\frac{1}{5};\frac{1}{2}]$.

Ainsi $2x-\sqrt{5x-1}<1\Leftrightarrow x\in[\frac{1}{5};\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2};2[=[\frac{1}{5};2]$.

5. L'équation de départ est vérifiée si les deux inéquations sont vérifiées, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\lfloor 2x-\sqrt{5x-1}\rfloor = 0 &\Leftrightarrow x\in[\frac{1}{5};\frac{1}{4}]\cup[1;+\infty[\text{ et } x\in[\frac{1}{5};2[\\ &\Leftrightarrow x\in[\frac{1}{5};\frac{1}{4}]\cup[1;2[\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4

1. Si $u_0 = v_0$ on a $v_1 = \frac{v_0+v_0}{2} = v_0$ et $u_1 = \sqrt{u_0 u_0} = u_0$. De la même façon, on peut montrer par récurrence que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   - Initialisation : la propriété est vraie au rang 0 ;
   - Hérédité : si $u_n = v_n$, avec les arguments précédents on montre que $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$, donc $u_{n+1} = v_{n+1}$.

   Ensuite, si $u_0 = 0$, on a $u_1 = 0$ et $v_1 = \frac{v_0}{2}$. On va montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0, v_n = \frac{b}{2^n}$ par récurrence :
   - Initialisation : la propriété est vraie au rang 0 ;
   - Hérédité : si la propriété est vraie au rang n, on a

   $$u_{n+1} = \sqrt{0 \times \frac{b}{2^n}} = 0, \qquad v_{n+1} = \frac{0+v_n}{2} = \frac{b}{2^{n+1}}$$

   La propriété est vraie pour tout n.
2. Montrons $\mathcal{P}(n) =$« u_n, v_n sont définis et positifs » par récurrence sur n :
   - Initialisation : u_0 et v_0 sont bien définis et positifs par définition.
   - Hérédité : supposons u_n et v_n définis et positifs. Alors u_{n+1} est bien défini, car c'est la racine carrée d'un nombre positif (produit de deux nombres positifs) ; de plus $u_{n+1} \geq 0$ car la racine carrée est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Enfin, v_{n+1} est bien définie et positive en tant que somme de deux nombres positifs.

   La propriété est démontrée par récurrence.
3. On a

   $$\begin{aligned} u_{n+1} \leq v_{n+1} &\Leftrightarrow \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

   Cette dernière inégalité est toujours vraie car un carré d'un nombre réel est toujours positif ; ainsi $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$; en effet, cette propriété est vraie pour $n = 0$ par définition de a et b, et elle est vraie pour $n \geq 1$ d'après la question précédente.
5. On cherche à montrer que $u_{n+1} \geq u_n$ et que $v_{n+1} \leq v_n$. Pour la première inégalité, on a par exemple

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n}\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}^2 \\ &= \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \end{aligned}$$

   D'après ce qui précède on a $u_n \leq v_n$, et donc par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ on a $\sqrt{u_n} \leq \sqrt{v_n}$; donc $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \geq 0$. Comme $\sqrt{u_n} \geq 0$, le produit de ces deux choses est positif et donc $u_{n+1} \geq u_n$. (On pouvait aussi regarder le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ mais dans ce cas il faut justifier que u_n ne s'annule jamais.)

Pour ce qui est de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2v_n}{2} \\ &= \frac{u_n - v_n}{2} \end{aligned}$$

Comme $u_n \leq v_n$ d'après la question précédente on a $v_{n+1} - v_n \leq 0$, ce qui prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6. On écrit :

$$\begin{aligned} u_n &\leq v_n && \text{d'après la question 4} \\ &\leq v_0 && \text{car } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroît d'après la question précédente} \\ &\leq b \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} v_n &\geq u_n && \text{d'après la question 4} \\ &\geq u_0 && \text{car } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante d'après la question précédente} \\ & a \end{aligned}$$

On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc qu'elle converge par le théorème de convergence monotone ; et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc elle converge (toujours par le théorème de convergence monotone).

7. On calcule ce qui est demandé :

$$v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$$

Il s'agit ensuite d'établir une inégalité sur $v_{n+1} - u_{n+1}$. Le fait que cette différence soit positive est établi à la question 3 ; on écrit ensuite la majoration suivante :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &\leq v_{n+1} - u_n && \text{car } u_{n+1} \geq u_n \\ &\leq \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

On va utiliser cette relation pour montrer par récurrence que $v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$:

— Initialisation : on a $v_1 - u_1 \leq v_1 - u_0 \leq \frac{v_0 - u_0}{2}$ donc la propriété est vérifiée.

— Hérédité : supposons que $v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$. Alors

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n \leq \frac{v_n - u_n}{2} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

ce qui prouve l'hérédité.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite.

8. a) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $u_n \geq u_0 = 1$. Et d'après la question 6, on a aussi $v_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n} \geq 1 + 1 = 2$; par croissance de la fonction carré on obtient $(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2 \geq 2^2 = 4$.

b) Commençons par l'indication :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} &\Leftrightarrow (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})=a\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+a}^2-\sqrt{x}^2=a\\ &\Leftrightarrow x+a-x=a\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie donc la première égalité est vraie. Supposons maintenant que $v_n-u_n\leq\frac{1}{2^k}$, et regardons $v_{n+1}-u_{n+1}$. Comme on l'a écrit à la question 3 on a

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n})^2}{2}$$

En procédant comme dans l'indication on a

$$\begin{aligned}\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}&=\sqrt{u_n+(v_n-u_n)}-\sqrt{u_n}\\ &=\frac{v_n-u_n}{\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n}}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n})^2}{2}&=\frac{\frac{(v_n-u_n)^2}{(\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n})^2}}{2}\\ &=\frac{(v_n-u_n)^2}{2(\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n})^2}\\ &\leq\frac{1}{(2^k)^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{(\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n})^2}\end{aligned}$$

D'après 8)a) on a $\frac{1}{(\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n})^2}\leq\frac{1}{4}$ et donc

$$v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2^{2k}}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2^{2k+3}}$$

c)
- Au début, pour $n=0$, on a $b-a=1=\frac{1}{2^0}$.
- Ensuite, pour $n=1$, on applique l'inégalité ci-dessous avec $k=0$; on a alors $v_1-u_1\leq\frac{1}{2^3}$.
- Pour $n=2$ on trouve $v_2-u_2\leq\frac{1}{2^{2\times 3+3}}=\frac{1}{2^9}$.
- Pour $n=3$ la borne est de $\frac{1}{2^{21}}$.
- Pour $n=4$ la borne est de $\frac{1}{2^{45}}$.
- Pour $n=5$ la borne est de $\frac{1}{2^{93}}$.
- Pour $n=6$ la borne est de $\frac{1}{2^{189}}$.

On est alors sûrs que $v_6-u_6\leq 2^{-100}$. Ainsi au bout de 6 termes la distance entre les termes est 2^{-100} ; il s'agit donc d'une convergence très rapide !