DS 02 - 18 octobre

Durée : 3h30. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Questions de cours

1. Résoudre l'équation $z^2 = 2i$ sur $\mathbb{C}$.
2. Rappeler la définition d'Arccos, en n'oubliant pas de préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.
3. Rappeler la formule permettant de calculer une somme téléscopique.

Exercice 1

Soient trois complexes z_1, z_2, z_3 tels que

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \qquad \text{et} \qquad z_1 + z_2 + z_3 = 1 \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 z_3 = 1$$

1. Comparer $\overline{z_1}$ et $\frac{1}{z_1}$.
2. Montrer que $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 1$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.
   a) Développer $P(z)$ et en donner une expression uniquement en fonction de z.
   b) Résoudre $P(z) = 0$, en cherchant une racine évidente. Que peut-on en déduire concernant z_1, z_2, z_3 ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n}$$

1. En effectuant le changement d'indice $\ell = n - k$, déterminer une nouvelle expression de S.
2. En déduire la valeur de $2S$ puis de S.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0; \pi[$. On pose

$$C_n = \sum_{p=1}^{n} \cos^p(\theta) \cos(p\theta) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{p=1}^{n} \cos^p(\theta) \sin(p\theta)$$

1. Calculer $C_n + iS_n$ en fonction de n et θ (et sans symbole $\sum$).
2. Écrire sous forme trigonométrique le complexe $1 - \cos(\theta)e^{i\theta}$.
3. En déduire $C_n = \frac{\cos^{n+1}(\theta)\sin(n\theta)}{\sin\theta}$.

Exercice 4

1. Résoudre l'équation $\sin(4x) = \sin(x)$ pour $x \in]0; \pi[$.
2. À l'aide d'une antilinéarisation, démontrer que

$$\begin{cases} \sin(4x) = \sin x \\ \sin(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0$$

3. Déterminer explicitement toutes les solutions de l'équation $8X^3 - 4X - 1 = 0$ (on pourra s'aider d'une solution « évidente » donnée par la question 1) et en déduire la valeur de $\cos(\pi/5)$.

Exercice 5

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin a + \sin b + \sin c = 0$$

1. Montrer que

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0.$$

2. Dans cette question, on pose $\alpha = a - c$ et $\beta = b - c$.
   a) Montrer que

   $$1 + e^{ia} + e^{ib} = 0.$$

   b) Montrer que $\sin(\alpha) = -\sin(\beta)$ et en déduire que $\alpha = -\beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Pour la suite de l'exercice, on considère, quitte à échanger α et β, que $\sin(\alpha) \geq 0$.
   c) Montrer que $1 + \cos\alpha + \cos\beta = 0$ et en déduire que la seule possibilité qui reste est $\alpha = -\beta + 2k\pi$.
   d) Calculer $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$ et $\sin\beta$, puis en déduire $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$.
   e) En déduire que $e^{ia} = je^{ic}$ et $e^{ib} = j^2e^{ic}$, avec $j = e^{i2\pi/3}$.
3. a) Exprimer j^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) En écrivant $1 + j + j^2$ avec le symbole $\sum$, montrer que cette somme est nulle.
   c) Retrouver cette propriété à partir des résultats de la question 1 et 2.
4. Montrer que

$$e^{i2a} + e^{i2b} + e^{i2c} = 0$$

   et en déduire que

$$\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c) = 0.$$

5. Soit n un entier qui n'est pas divisible par 3. Montrer que $e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} = 0$ et en déduire que $\cos(na) + \cos(nb) + \cos(nc) = 0$ et $\sin(na) + \sin(nb) + \sin(nc) = 0$.

Question de cours

1. Lors du calcul de racine carrée, on cherche à mettre le nombre sous forme exponentielle. Le module de ce nombre est 2, et son argument principal est $\frac{\pi}{2}$ car $e^{i\pi/2} = i$. Ainsi $z^2 = 2i \Leftrightarrow z^2 = 2e^{i\pi/2} \Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ ou $-\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
2. Arccos(c) est l'unique solution sur $[0;\pi]$ de l'équation $\cos(x) = c$. $c \to$ Arccos(c) est défini pour $c \in [-1;1]$, et est à valeurs dans $[0;\pi]$.
3. $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$.

Correction de l'exercice 1

1. On a $|z_1|^2 = 1$, mais aussi $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$; ainsi $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$.
2. On écrit

$$\begin{aligned}
z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 &= \frac{z_1z_2z_3}{z_3} + \frac{z_1z_2z_3}{z_1} + \frac{z_1z_2z_3}{z_2} \\
&= \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} \qquad \text{d'après la question 1} \\
&= \overline{z_1 + z_2 + z_3} \\
&= \overline{1} = 1 \qquad \text{car } 1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3. a) On a

$$\begin{aligned}
P(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\
&= (z^2 - z_1z - z_2z + z_1z_2)(z - z_3) \\
&= (z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2)(z - z_3) \\
&= z^3 - (z_1 + z_2)z^2 + z_1z_2z - z_3z^2 - z_3(z_1 + z_2)z - z_1z_2z_3 \\
&= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_3z_2)z - z_1z_2z_3 \\
&= z^3 - z^2 + z - 1
\end{aligned}$$

   b) On a une solution évidente, qui est $z = 1$. On peut ainsi écrire

$$P(z) = z^2(z-1) + (z-1) = (z-1)(z^2+1)$$

   Les racines de P sont donc $1, i, -i$. Ainsi, on a $z_1 = 1$, $z_2 = i$, et $z_3 = -i$, ou toute permutation de ces solutions (il y a 6 triplets solution en tout en comptant ces permutations).

Correction de l'exercice 2

1. On écrit

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2 \frac{(n-k)\pi}{2n} \qquad \text{par le changement d'indice } \ell = n-k, \text{ c'est-à-dire } k = n-\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2n} - \frac{\ell\pi}{2n}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2n}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \sin^2 \left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) \qquad \text{car } \cos(\pi/2 - x) = \sin(x)
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
2S = S + S &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n} + \sum_{\ell=0}^{n} \sin^2 \frac{\ell\pi}{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \cos^2(\frac{k\pi}{2n}) + \sin^2(\frac{k\pi}{2n}) \qquad \text{car l'indice est muet} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 1 \qquad \text{car } \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\
&= n+1
\end{aligned}$$

Ainsi $S = \frac{n+1}{2}$.

Correction de l'exercice 3

1. On écrit

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{p=1}^{n} \cos^p(\theta)\cos(p\theta) + i \sum_{p=1}^{n} \cos^p(\theta)\sin(p\theta) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \cos^p(\theta)\left(\cos(p\theta) + i\sin(p\theta)\right) \qquad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \cos^p(\theta) e^{ip\theta} \qquad \text{par la formule de de Moivre} \\
&= \sum_{p=1}^{n} (\cos(\theta)e^{i\theta})^p \\
&= (\cos(\theta)e^{i\theta}) \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(\theta)e^{i\theta})^k \qquad \text{par le changement d'indice } k = p-1
\end{aligned}$$

Ceci est une somme géométrique, mais il faut montrer que la raison n'est pas 1 pour pouvoir appliquer la formule. On a $\cos(\theta)e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta = 0[\pi]$. Or $\theta \in]0;\pi[$, donc on a bien $\cos(\theta)e^{i\theta} \neq 1$. Ainsi

$$C_n + iS_n = \cos(\theta)e^{i\theta} \frac{1 - (\cos(\theta)e^{i\theta})^n}{1 - \cos(\theta)e^{i\theta}}$$

2. Il s'agit de déterminer son module et son argument. On peut calculer le module de deux façons : en essayant de déterminer la partie réelle et imaginaire, ou en calculant le produit du nombre et son conjugué. Faisons les deux méthodes :
   — Première méthode : on a $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ donc
   $$\begin{aligned} 1-\cos(\theta)e^{i\theta} &= 1-\cos(\theta)(\cos(\theta)+i\sin\theta) \\ &= 1-\cos^2(\theta) - i\cos(\theta)\sin(\theta) \\ &= \sin^2(\theta) - i\cos(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$
   On a donc
   $$\begin{aligned} |1-\cos(\theta)e^{i\theta}| &= \sqrt{\sin^4(\theta)+(\cos(\theta)\sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{\sin^2(\theta)(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))} \\ &= \sqrt{\sin^2(\theta)} = |\sin(\theta)| \end{aligned}$$
   Or on suppose que $\theta \in]0;\pi[$; on a alors que $\sin(\theta) > 0$, et donc $|\sin(\theta)| = \sin(\theta)$. Ainsi $|1-\cos(\theta)e^{i\theta}| = \sin(\theta)$.
   — Deuxième méthode : on a $\overline{1-\cos(\theta)e^{i\theta}} = 1-\cos(\theta)e^{-i\theta}$, et donc
   $$\begin{aligned} |1-\cos(\theta)e^{i\theta}| &= \sqrt{(1-\cos(\theta)e^{i\theta})\times(1-\cos(\theta)e^{-i\theta}} \\ &= \sqrt{1+\cos^2(\theta)-\cos(\theta)e^{i\theta}-\cos(\theta)e^{-i\theta}} \\ &= \sqrt{1+\cos^2(\theta)-\cos(\theta)\times 2\cos(\theta)} \\ &= \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = |\sin(\theta)| \end{aligned}$$
   et là encore comme $\theta \in]0;\pi[$ on a $|\sin(\theta)| = \sin(\theta)$.

   Ainsi on a
   $$\begin{aligned} 1-\cos(\theta)e^{i\theta} &= \sin(\theta)\left(\frac{1-\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} - i\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)}\right) \\ &= \sin(\theta)\left(\sin(\theta)-i\cos(\theta)\right) \end{aligned}$$
   Le calcul de l'argument revient donc à trouver un angle ϕ tel que $\cos(\phi) = \sin(\theta)$ et $\sin(\phi) = -\cos(\theta)$. Or on sait d'après les formules de trigonométrie que $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)$ et $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta)$; ainsi, on a
   $$1-\cos(\theta)e^{i\theta} = \sin(\theta)e^{i(\theta-\pi/2)}$$

3. D'après les questions précédentes, on a
   $$\begin{aligned} C_n + iS_n &= \cos(\theta)e^{i\theta}\frac{1-\cos^n(\theta)e^{in\theta}}{1-\cos(\theta)e^{i\theta}} \\ &= \cos(\theta)e^{i\theta}\frac{1-\cos^n(\theta)e^{in\theta}}{\sin(\theta)e^{i\theta}e^{-i\pi/2}} \\ &= \cos(\theta)\frac{1-\cos^n(\theta)e^{in\theta}}{-i\sin(\theta)} \qquad \text{car } e^{-i\pi/2} = -i \\ &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\times i \times (1-\cos^n(\theta)(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)) \\ &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\cos^n(\theta)\sin(n\theta) + i\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - i\frac{\cos^{n+1}(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(n\theta) \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires on obtient

$$C_n = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cos^n(\theta)\sin(n\theta) = \frac{\cos^{n+1}(\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

Correction de l'exercice 4

1. On a (en regardant par exemple sur le cercle trigonométrique, ou avec les formules de trigonométrie)

$$\begin{aligned}\sin(4x) = \sin(x) &\Leftrightarrow 4x = x + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad 4x = \pi - x + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \text{ ou } 5x = \pi + 2k\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\end{aligned}$$

Or on cherche les valeurs pour $x > 0$ et $x < \pi$; comme $\frac{2\times 2\times\pi}{3} > \pi$ et $\frac{2\times 3\times \pi}{5} > \pi$, on trouve une solution dans le premier cas et deux dans le second cas. Ainsi

$$\sin(4x) = \sin(x), x \in]0;\pi[\Leftrightarrow x \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\}$$

2. Il s'agit tout d'abord de calculer une antilinéarisation de $\sin(4x)$; on fait ce calcul avec la formule de de Moivre :

$$\begin{aligned}\cos(4x) + i\sin(4x) &= (\cos(x) + i\sin(x))^4 \\ &= (\cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x))^2 \\ &= (\cos^2(x) - \sin^2(x))^2 - 4\cos^2(x)\sin^2(x) + 4i\cos(x)\sin(x) \times (\cos^2(x) - \sin^2(x))\end{aligned}$$

Ici on ne veut que la partie imaginaire, puisqu'on cherche $\sin(4x)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= 4\cos(x)\sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= 4\cos(x)\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) \\ &= 8\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\begin{cases}\sin(4x) = \sin(x) \\ \sin(x) \neq 0\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x) - \sin(x) = 0 \\ \sin(x) \neq 0\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8\cos^3(x) - 4\cos(x) - 1 = 0 \\ \sin(x) \neq 0\end{cases} \qquad \text{car } \sin(x) \neq 0\end{aligned}$$

Il faut maintenant montrer que ce système est équivalent à simplement $8\cos^3(x) - 4\cos(x) - 1$. Or si on a deux conditions simultanées, la première est bien vraie ; ainsi

$$\text{„}\begin{cases} 8\cos^3(x) - 4\cos(x) - 1 = 0 \\ \sin(x) \neq 0\end{cases}\text{"} \Rightarrow 8\cos^3(x) - 4\cos(x) - 1 = 0$$

Il reste à montrer la réciproque. Supposons $\sin(x) = 0$; alors $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$; dans les deux cas, en faisant le calcul, on a que $\cos(x)$ n'est pas solution de cette équation polynômiale. Ainsi si $\cos(x)$ vérifie cette équation polynômiale, on a bien $\sin(x) \neq 0$. Ceci achève la preuve de l'équivalence.

3. On a résolu l'équation $\sin(4x) = \sin(x)$ à la question 1, et on a trouvé $x \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\}$. Ainsi les solutions de l'équation sont $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$, c'est-à-dire

$$8X^3 - 4X - 1 = 8(X - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right))(X - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right))(X - \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right))$$

Or on sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; ainsi $\frac{-1}{2}$ est une racine du polynôme $8X^3 - 4X - 1$, ce qu'on peut vérifier. On peut factoriser le polynôme :

$$\begin{aligned} 8X^3 - 4X - 1 &= (X + \frac{1}{2})(aX^2 + bX + c) \\ &= aX^3 + (\frac{a}{2} + b)X^2 + (\frac{b}{2} + c)X + \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Par identification on trouve $a = 8$, $c = -2$, et $\frac{a}{2} + b = 0$, ainsi $b = -4$. Donc

$$\begin{aligned} 8X^3 - 4X - 1 &= (X + \frac{1}{2})(8X^2 - 4X - 2) \\ &= 2(X + \frac{1}{2})(4X^2 - 2X - 1) \end{aligned}$$

Pour ce qui est du trinôme du second degré, on a $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times 4 = 20$, et donc les solutions sont

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} > 0, \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} < 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 8X^3 - 4X - 1 &= 8\left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)\left(X - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right) \\ &= 8(X - \cos(2\pi/3))(X - \cos(\pi/5))(X - \cos(3\pi/5)) \end{aligned}$$

Comme on a $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{5} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et est donc de cosinus positif. Ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

Correction de l'exercice 5

1. Par définition, $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$, et de même pour les autres. On a donc

$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} &= (\cos(a) + i\sin(a)) + (\cos(b) + i\sin(b)) + (\cos(c) + i\sin(c)) \\ &= (\cos(a) + \cos(b) + \cos(c)) + i(\sin(a) + \sin(b) + \sin(c)) = 0 + i \times 0 = 0 \end{aligned}$$

2. a) On a

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0 &\Leftrightarrow 1 + e^{i(a-c)} + e^{i(b-c)} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{ic} + e^{ia} + e^{ib} = 0 \qquad \text{car } e^{ic} \neq 0 \end{aligned}$$

La dernière proposition est vraie d'après la question précédente, donc on a bien $1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$.

b) En identifiant les parties imaginaires dans l'équation précédente, on trouve

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 0, \qquad \text{donc} \qquad \sin(\alpha) = -\sin(\beta)$$

Les solutions de $\sin(\alpha) = -\sin(\beta)$ sont $\alpha = -\beta + 2k\pi$ (car sin est impaire et 2π-périodique) et $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi$ (car $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$). On trouve bien ce qu'il faut trouver.

c) En identifiant les parties réelles dans l'équation de la question 2)a) on trouve

$$1 + \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 0$$

Si on a $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi$, on a $\cos(\alpha) = \cos(\pi + \beta) = -\cos(\beta)$; en réinjectant dans l'équation on trouve $1 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi nécessairement on a $\alpha = -\beta + 2k\pi$.

d) En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$\begin{aligned} & 1 + \cos(-\beta) + \cos(\beta) = 0 \\ \text{donc} \qquad & 1 + 2\cos(\beta) = 0 \\ \text{donc} \qquad & \cos(\beta) = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $\cos(\beta) = \cos\frac{2\pi}{3}$. Les solutions de cette équation sont $\beta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ et $\beta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; de même, vu que $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$, on a $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi$. Comme $\sin(\alpha) \geq 0$, on a $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi$, et donc $\beta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ puisque $\sin(\alpha) = -\sin(\beta)$. Ainsi

$$e^{i\alpha} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad e^{i\beta} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e) On a

$$e^{ia} = e^{i(a-c)}e^{ic} = e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{ic} = je^{ic}, \qquad e^{ib} = e^{i(b-c)}e^{ic} = e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{ic} = j^2e^{ic}$$

3. a) On a

$$\begin{aligned} j &= e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ j^2 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ j^3 &= e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i2\pi} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a les trois cas suivants :
- Si n est un multiple de 3, $n = 3k$, on a $j^n = j^{3k} = (j^3)^k = 1^n = 1$.
- Si $n = 3k + 1$, on a $j^n = j^{3k} \times j = j$.
- Si $n = 3k + 2$, on a $j^n = j^{3k} \times j^2 = j^2$.

b) On écrit

$$1 + j + j^2 = \sum_{k=0}^{2} j^k$$

Ceci est la somme de termes d'une suite géométrique de raison j. Comme $j \neq 1$, on a donc

$$\begin{aligned} 1 + j + j^2 &= \frac{1 - j^3}{1 - j} \\ &= 0 \qquad \text{car } j^3 = 1 \end{aligned}$$

c) D'après la question 1 on a $e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}=0$, et la question 2 a montré que $e^{ia}=je^{ic}$ et $e^{ib}=j^2e^{ic}$. Ainsi

$$e^{ic}+je^{ic}+j^2e^{ic}=0, \qquad (1+j+j^2)e^{ic}=0$$

Comme $e^{ic}\neq 0$, on a $1+j+j^2=0$.

4. On a

$$\begin{aligned} e^{i2a}+e^{i2b}+e^{i2c}=0 &\Leftrightarrow \left(je^{ic}\right)^2+\left(j^2e^{ic}\right)^2+e^{2ic}=0 \\ &\Leftrightarrow (j^2+j^4+1)e^{i2c}=0 \\ &\Leftrightarrow (j^2+j+1)e^{i2c}=0 \qquad \text{car } 4=3\times 1+1 \text{ et d'après 3)a)} \end{aligned}$$

Cette dernière proposition est vraie car $1+j+j^2=0$. Ainsi on a bien $e^{i2a}+e^{i2b}+e^{i2c}=0$. En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires on a

$$\cos(2a)+\cos(2b)+\cos(2c)=0, \qquad \sin(2a)+\sin(2b)+\sin(2c)=0$$

5. On distingue deux cas :
   — Si $n=3k+1$: on a alors

$$\begin{aligned} e^{ina}+e^{inb}+e^{inc} &= (j^{3k+1}+j^{2(3k+1)}+1)e^{ic} \\ &= (j+j^2+1)e^{ic} \qquad \text{car } j^{3k}=1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   — Si $n=3k+2$, alors

$$\begin{aligned} e^{ina}+e^{inb}+e^{inc} &= (j^{3k+2}+j^{2(3k+2)}+1)e^{ic} \\ &= (j^2+j^4+1)e^{ic}=(j^2+j+1)e^{ic}=0 \end{aligned}$$

Dans les deux cas on a $e^{ina}+e^{inb}+e^{inc}=0$; en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires on a

$$\cos(na)+\cos(nb)+\cos(nc)=0, \qquad \sin(na)+\sin(nb)+\sin(nc)=0$$