DS 04 - 21 décembre

Durée : 3h30. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Question de cours

Dessiner à main levée et sans justification les courbes des fonctions suivantes : $x \to \frac{1}{x^2}$, $x \to x^\pi$, $x \to \tan(x)$, $x \to \mathrm{Arctan}(x)$.

Exercice 1

(tiré de X-International 2017)

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$: $P(P(X)) = P(X)^2$, où $P(P(X))$ désigne $(P \circ P)(X)$.

1. Y'a-t-il des polynômes constants qui vérifient l'équation $(*)$?

Dans les questions suivantes, on supposera que P est un polynôme non constant qui vérifie $(*)$.

2. Déterminer une relation sur le degré de P, puis calculer $\deg P$.
3. Que vaut le coefficient devant X^2 dans P ?
4. Trouver tous les polynômes solution de $(*)$.
5. a) Soit $Q = X^k$. Que vaut $\deg(Q(X+1) - Q(X) - Q'(X))$?
   b) Soit P un polynôme quelconque ; exprimer $\deg(P(X+1) - P(X) - P'(X))$ en fonction de $\deg(P)$.
   c) À l'aide d'un raisonnement similaire aux questions précédentes, trouver les solutions $P \in \mathbb{R}[X]$ de l'équation

$$P(P''(X)) = P(X+1) - P(X) - P'(X)$$

Exercice 2

1. Factoriser le polynôme $P = X^4 - X^3 - X^2 - X - 2$ sur $\mathbb{C}[X]$, puis sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha}{X-2} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X^2+1} + \frac{\delta X}{X^2+1}$$

   (On pourra traiter les questions suivantes sans avoir déterminé $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.)

3. Calculer une primitive de $\frac{1}{P(x)}$.
4. Calculer une primitive de $\frac{4x^3-3x^2-2}{P(x)}$. *(On commencera par faire apparaître la dérivée de P au numérateur ; on ne cherchera pas à simplifier la fonction finale.)*

Exercice 3 *(tiré de G2E 2017)*

1. Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle

$$(E): \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) = \frac{2}{3}y'(t) - \frac{1}{9}y(t)$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et ϕ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(t) = (at + b)e^{t/3}$$

a) Montrer que ϕ' est solution de (E), ainsi que ϕ'', $\phi^{(3)}$, etc. En déduire qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)e^{t/3}$$

b) Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont à la même relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n, \qquad b_{n+2} = \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n$$

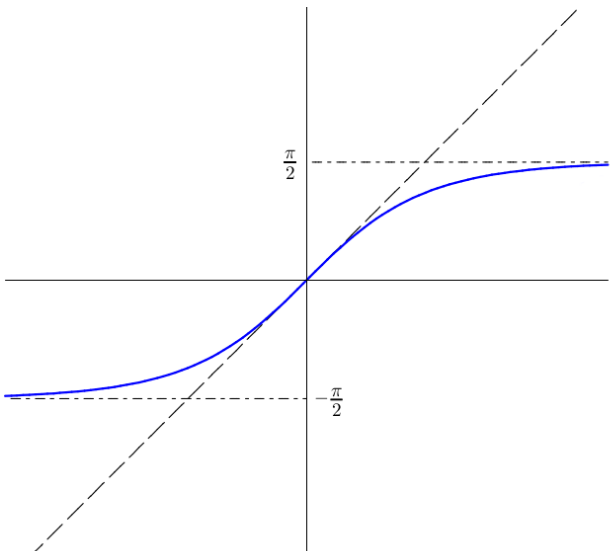
c) Déterminer a_n et b_n en fonction de a, b et n.

Exercice 4

On définit la fonction suivante :

$$G : \mathbb{R} \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

Le graphe de la fonction (ainsi que de la droite $y = x$) est donné ci-contre.



1. Quelles propriétés de G peut-on lire ou deviner sur la figure ?
2. Calculer $G(\ln(1 + \sqrt{2}))$.
3. Montrer que $x \to e^x - e^{-x}$ est croissante. En déduire que G est croissante.
4. Montrer que G est impaire.
5. Au vu de la figure, pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$ peut-il exister un x tel que $G(x) = y$? Pour de telles valeurs, résoudre $G(x) = y$. *(On posera $X = e^x$.)*
6. En déduire que G est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et préciser son application réciproque.
7. Tracer l'allure du graphe de l'application réciproque.
8. Calculer la dérivée de G et de G^{-1}.

Questions de cours

Correction de l'exercice 1

1. Si P est un polynôme constant, on a $P(X) = c$ et également $P(P(X)) = c$. On obtient donc $c^2 = c$, soit $c(c-1) = 0$. Ainsi les seuls polynômes constants qui sont solution sont 0 et 1.
2. Si P est non constant, on peut écrire $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$. On a alors

$$P(P(X)) = a_n(a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0)^n + \ldots + a_1(a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0) + a_0$$

Le terme de plus haut degré ici est le terme en $a_n \times a_n^n(X^n)^n$, qui est de degré n^2. De l'autre côté du égal, on a

$$P(X)^2 = (a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0)^2 = a_n^2X^{2n} + \ldots$$

Puisque ces deux polynômes sont égaux, leurs degrés doivent être égaux, et on a donc $2n = n^2$. Ceci équivant à $n = 0$ (impossible, car le polynôme est supposé non constant) ou $n = 2$; ainsi le degré de P est 2.
3. On a

$$\begin{aligned} P(P(X)) = P(X)^2 &\Leftrightarrow a_2(a_2X^2 + a_1X + a_0)^2 + \ldots + a_0 = (a_2X^2 + a_1X + a_0)^2 \\ &\Leftrightarrow a_2^3X^4 + \ldots = a_2^2X^4 + \ldots \end{aligned}$$

Par identification des coefficients dominants on a $a_2^2 = a_2 \times a_2^2$, donc $a_2 = 0$ (impossible par définition du coefficient dominant) ou $a_2 = 1$. Ainsi le coefficient dominant est 1.
4. On a

$$\begin{aligned} P(P(X)) &= (X^2 + aX + b)^2 + a(X^2 + aX + b) + b \\ P(X)^2 &= (X^2 + aX + b)^2 P(P(X)) = P(X)^2 \qquad \Leftrightarrow a(X^2 + aX + b) + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \end{aligned}$$

Ainsi les seules solutions de $(*)$ sont 0, 1 et X^2.
5. a) On a

$$\begin{aligned} (X+1)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j \\ &= X^k + \binom{k}{k-1} X^{k-1} + \binom{k}{k-2} X^{k-2} + \ldots \\ &= X^k + kX^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} X^{k-2} + \ldots \end{aligned}$$

Donc $(X+1)^k - X^k - kX^{k-1} = \frac{k(k-1)}{2}X^{k-2} + \ldots$ et est donc de degré $k-2$.

b) Commençons par écrire $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$. Alors

$$\begin{aligned} P(X+1) &= a_n(X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \ldots + a_1(X+1) + a_0 \\ P(X+1) - P(X) &= a_n\left((X+1)^n - X^n\right) + a_{n-1}\left((X+1)^{n-1} - X^{n-1}\right) \\ &\quad + \ldots + a_1\left(X + 1 - X\right) + a_0(1-1) \\ P'(X) &= a_n(X^n)' + a_{n-1}(X^{n-1})' + \ldots + a_1(X)' + a_0(1)' \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivée. Donc

$$\begin{aligned}P(X+1)-P(X)-P'(X) &= a_n\left((X+1)^n - X^n - (X^n)'\right) + a_{n-1}\Big((X+1)^{n-1} - X^{n-1} - (X^{n-1})'\\ &\quad + \ldots + a_1\left(X+1-X-(X)'\right) + a_0(1-1-(1)')\end{aligned}$$

D'après la question précédente le premier terme est de degré $n-2$, le deuxième de degré $n-3$, et ainsi de suite (le degré décroît). Ainsi

$$\deg(P(X+1)-P(X)-P'(X)) = \deg(P)-2$$

c) Par identification des degrés on trouve $n(n-2)=(n-2)$. Ainsi le polynôme est de degré 1. Si on a un polynôme de degré 1, on a $P''=0$ et $P(X+1)-P(X)-P'(X)=0$, et on trouve $P(0)=0$, ce qui laisse comme possibilité les polynômes de la forme aX avec $a\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2

1. On commence par chercher des racines évidentes :
   - $P(0)=-2\neq 0$;
   - $P(1)=-4\neq 0$;
   - $P(-1)=3-3=0$; on a $P'=4X^3-3X^2-2X-1$ et $P'(-1)=-6$, donc -1 est racine simple ;
   - $P(i)=1+i+1-i-2=0$; on a $P'(i)=-4i+3-2i-1\neq 0$ donc i est racine simple ;
   - puisque le polynôme est à coefficients réels, on sait que $-i$ est racine ; mais on peut aussi le calculer et voir que $-i$ est racine simple.

   Ainsi $P=(X-i)(X+i)(X+1)Q$ avec $\deg Q=1$. Par identification des coefficients dominants, celui de Q est 1 ; par identification des coefficients constants, celui de Q est -2. Ainsi

$$\begin{aligned}P &= (X-i)(X+i)(X+1)(X-2) && \text{(factorisation sur } \mathbb{C}[X])\\ &= (X^2+1)(X+1)(X-2) && \text{(factorisation sur } \mathbb{R}[X])\end{aligned}$$

2. On remarque que, lorsqu'on réduit au même dénominateur, celui-ci est P. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{X-2}+\frac{\beta}{X+1}+\frac{\gamma}{X^2+1}+\frac{\delta X}{X^2+1}\\ &=\frac{\alpha(X+1)(X^2+1)+\beta(X-2)(X^2+1)+(\gamma+\delta X)(X-2)(X+1)}{P}\\ &=\frac{(\alpha+\beta+\delta)X^3+(\alpha-2\beta+\gamma-\delta)X^2+(\alpha+\beta-\gamma-2\delta)X+(\alpha-2\beta-2\gamma)}{P}\end{aligned}$$

   On a ainsi

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{X-2}+\frac{\beta}{X+1}+\frac{\gamma}{X^2+1}+\frac{\delta X}{X^2+1}=\frac{1}{P}\\ \Leftrightarrow&\frac{(\alpha+\beta+\delta)X^3+(\alpha-2\beta+\gamma-\delta)X^2+(\alpha+\beta-\gamma-2\delta)X+(\alpha-2\beta-2\gamma)}{P}=\frac{1}{P}\\ \Leftrightarrow&(\alpha+\beta+\delta)X^3+(\alpha-2\beta+\gamma-\delta)X^2+(\alpha+\beta-\gamma-2\delta)X+(\alpha-2\beta-2\gamma)=1\end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\delta &= 0 \\ \alpha-2\beta+\gamma-\delta &= 0 \\ \alpha+\beta-\gamma-2\delta &= 0 \\ \alpha-2\beta-2\gamma &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta &= -\delta \\ \alpha-2\beta+\gamma-\delta &= 0 \\ -\gamma-3\delta &= 0 \\ \alpha-2\beta-2\gamma &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta &= -\delta \\ \alpha-2\beta-4\delta &= 0 \\ \gamma &= -3\delta \\ \alpha-2\beta+6\delta &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta &= -\delta \\ \alpha-2\beta &= 4\delta \\ \gamma &= -3\delta \\ 4\delta+6\delta &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta &= \frac{-1}{10} \\ \alpha-2\beta &= \frac{4}{10} \\ \gamma &= \frac{-3}{10} \\ \delta &= \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\beta+\frac{4}{10} &= \frac{-1}{10} \\ \alpha-2\beta &= \frac{4}{10} \\ \gamma &= \frac{-3}{10} \\ \delta &= \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{-5}{30} \\ \alpha = \frac{2}{30} \\ \gamma = \frac{-3}{10} \\ \delta = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Au final

$$\frac{1}{P} = \frac{2}{30}\frac{1}{X-2} - \frac{5}{30}\frac{1}{X+1} - \frac{3}{10}\frac{1}{X^2+1} + \frac{1}{10}\frac{X}{X^2+1}$$

3. Il s'agit de calculer la primitive de l'expression ci-dessus. On trouve

$$\int \frac{1}{P} = \frac{2}{30}\ln(x-2) - \frac{5}{30}\ln(x+1) - \frac{3}{10}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{20}\ln(x^2+1)$$

4. On suit l'indication de l'énoncé ; on peut y penser en voyant que le numérateur commence par "$4x^3-3x^2$", qui est le début de la dérivée de P. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3-3x^2-2}{P(x)}dx &= \int \frac{4x^3-3x^2-2x-1+2x-1}{P(x)}dx \\ &= \ln(P(x)) + \int \frac{2x-1}{P(x)} \\ &= \ln(P(x)) + \frac{2}{30}\int \frac{2x-1}{x-2}dx - \frac{5}{30}\int \frac{2x-1}{x+1}dx - \frac{3}{10}\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{10}\int \frac{2x^2-x}{x^2+1}dx \end{aligned}$$

Calculons chacune des primitives séparément :

$$\int \frac{2x-1}{x-2}dx = \int \frac{2(x-2)+3}{x-2}dx = 2x + 3\ln(x-2)$$
$$\int \frac{2x-1}{x+1}dx = \int \frac{2(x+1)-3}{x+1}dx = 2x - 3\ln(x+1)$$
$$\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x)$$
$$\int \frac{2x^2-x}{x^2+1}dx = \int \frac{2(x^2+1)-x-2}{x^2+1} = 2x - \int \frac{x+2}{x^2+1} = 2x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\,\mathrm{Arctan}(x)$$

Au final, on obtient

$$\int \frac{4x^3-3x^2-2}{P(x)}dx = \ln(P(x)) + \frac{2}{30}\left(2x+3\ln(x-2)\right) - \frac{5}{30}\left(2x - 3\ln(x-2)\right)$$
$$- \frac{3}{10}\Big(\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x)\Big) + \frac{1}{10}\left(2x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\,\mathrm{Arctan}(x)\right)$$

Correction de l'exercice 3

1. Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre, linéaire et à coefficients constants et homogène. Le polynôme caractéristique est $X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{9}$. On a $\Delta = \frac{4}{9} - 4 \times \frac{1}{9} = 0$; il y a donc une seule racine réelle, $r_1 = -\frac{-\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc

$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{t/3}$$

2. a) — Première façon : On remarque que cette fonction est solution de l'équation différentielle (E). Ainsi

$$\phi'' - \frac{2}{3}\phi' + \frac{1}{3}\phi = 0$$

Par linéarité de la dérivée, on peut dériver cette relation et trouver

$$\phi^{(3)} - \frac{2}{3}\phi'' + \frac{1}{3}\phi' = 0$$

Ceci correspond à (E) appliquée à ϕ' ; ainsi ϕ' est solution de (E). En dérivant une seconde fois, on obtient $\phi'' \in S_E$; en dérivant n fois, on obtient que $\phi^{(n)} \in S_E$. Ainsi $\phi^{(n)}$ est de la forme décrite à la première question ; en notant a_n et b_n les coefficients qui apparaissent alors, on a

$$\phi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)e^{t/3}$$

— Deuxième façon : Dérivons ϕ ; on obtient :

$$\phi'(t) = ae^{t/3} + \frac{1}{3}(at+b)e^{t/3} = \left(\frac{a}{3}t + a + \frac{b}{3}\right)e^{t/3}$$

Ainsi ϕ' est de la même forme que les solutions de l'équation (E) : $\phi' \in S_E$. On peut alors amorcer un raisonnement par récurrence et montrer que $\phi^{(n)} \in S_E$:

— Initialisation : vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

— Hérédité : supposons que $\phi^{(n)} \in S_E$ et montrons que $\phi^{(n+1)} \in S_E$. On a

$$\phi^{(n)} = (a_n t + b_n)e^{t/3}$$
$$\phi^{(n+1)} = (a_n + \frac{1}{3}a_n t + \frac{1}{3}b_n)e^{t/3}$$

Donc $\phi^{(n+1)}$ est de la même forme que les solutions de (E), donc $\phi^{(n+1)} \in S_E$.

En bonus, on obtient les relations $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{3} + a_n$.

b) Les coefficients de cette relation de récurrence nous font penser à ceux de l'équation différentielle ; il faut donc utiliser cette dernière pour obtenir cette relation. On a $\phi^{(n)} \in S_E$ donc cette fonction vérifie l'équation (E). On a donc en réinjectant

$$\begin{aligned}
&(a_{n+2}t + b_{n+2})e^{t/3} - \frac{2}{3}(a_{n+1}t + b_{n+1})e^{t/3} + \frac{1}{9}(a_n t + b_n)e^{t/3} = 0\\
\Leftrightarrow &\left((a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{9}a_n)t + (b_{n+2} - \frac{2}{3}b_{n+1} + \frac{1}{9}b_n)\right) e^{t/3} = 0\\
\Leftrightarrow &(a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{9}a_n)t + (b_{n+2} - \frac{2}{3}b_{n+1} + \frac{1}{9}b_n)
\end{aligned}$$

car $e^{t/3} \neq 0$. La fonction ci-dessus est donc nulle pour tout $t \in \mathbb{R}$; comme il s'agit d'un polynôme de degré 1, on en déduit que c'est le polynôme nul, et chacun de ses coefficients est donc nul. Ainsi

$$a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{9}a_n = 0, \qquad b_{n+2} - \frac{2}{3}b_{n+1} + \frac{1}{9}b_n = 0$$

c) Ce sont des suites récurrentes d'ordre 2 ; le polyôme caractéristique associé est le même que celui de (E) et est de discriminant nul. Ainsi a_n et b_n sont de la forme $(\lambda n + \mu)\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Or on sait que $a_0 = a$ et $b_0 = b$ donc

$$a_n = \frac{\lambda_1 n + a}{3^n}, \qquad b_n = \frac{\lambda_2 n + b}{3^n}$$

En dérivant ϕ on trouve que $a_1 = a/3$ et $b_1 = b + a/3$; ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1 + a}{3} &= \frac{a}{3} &\qquad \Rightarrow \lambda_1 = 0\\
\frac{\lambda_2 + b}{3} &= b + \frac{a}{3} &\qquad \lambda_2 = 2b + a
\end{aligned}$$

Ainsi

$$a_n = \frac{a}{3^n}, \qquad b_n = \frac{2nb + 2a(n+1)}{3^n}$$

Correction de l'exercice 4

1. Elle est continue, strictement croissante, impaire, bornée, tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, tend vers $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$, vaut 0 en 0, et est bijective.

2. On a
$$\begin{aligned}G(\ln(1+\sqrt{2})) &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{e^{\ln(1+\sqrt{2})}-e^{-\ln(1+\sqrt{2})}}{2}\right)\\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+\sqrt{2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}}{2}\right)\\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{(1+\sqrt{2})^2-1}{2+2\sqrt{2}}\right)\\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{3-1+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}\right)\\ &= \operatorname{Arctan}(1)\end{aligned}$$
Arctan(1) est le nombre tel que $\tan(x)=1$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$; ainsi $G(\ln(1+\sqrt{2}))=\frac{\pi}{4}$.
3. La dérivée de cette fonction est $x \to e^x + e^{-x}$, qui est la somme de deux exponentielles donc est croissante. La dérivée de Arctan est $\frac{1}{1+x^2}>0$, donc $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ est croissante. La composée de deux fonctions croissantes étant croissante, la fonction est croissante.
4. On a
$$\begin{aligned}G(-x) &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right)\\ &= \operatorname{Arctan}\left(-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\\ &= -\operatorname{Arctan}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = -G(x)\end{aligned}$$
et ceci car la fonction Arctan est impaire (car c'est la réciproque d'une fonction impaire, tan). [L'imparité de Arctan est au programme ; la justification précédente n'est pas forcément exigible, mais on l'a fait en TD.]
5. Au vu de la figure, $G(x)=y$ a une solution pour $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On a alors
$$\begin{aligned}y=G(x) &\Leftrightarrow y = \operatorname{Arctan}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow \tan(y) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \text{car } y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\text{ donc } \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = \operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x\\ &\Leftrightarrow \tan(y) = \frac{X-\frac{1}{X}}{2} \qquad \text{en posant } X=e^x\\ &\Leftrightarrow 2X\tan(y) = X^2-1\\ &\Leftrightarrow X^2-2X\tan(y)-1=0\end{aligned}$$
Le discriminant de ce trinôme est $4\tan^2(y)+4>0$; il y a ainsi deux racines réelles,
$$X_1 = \frac{2\tan(y)+\sqrt{4\tan^2(y)+4}}{2} = \tan(y)+\sqrt{tan^2(y)+1}, \qquad X_2 = \tan(y)-\sqrt{\tan^2(y)+1}$$

Or $\tan(y) \leq |\tan(y)| \leq \sqrt{\tan^2(y)} \leq \sqrt{\tan^2(y)+1}$ donc $X_2 < 0$; comme on a posé $X = e^x$, on ne retient que la solution positive. Ainsi

$$\begin{aligned} y = G(x) &\Leftrightarrow e^x = \tan(y) + \sqrt{\tan^2(y)+1} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\tan(y) + \sqrt{\tan^2(y)+1}\right) \end{aligned}$$

6. Pour tout élément de l'ensemble d'arrivée de la fonction, il existe un unique antécédent : la fonction est bijective. De plus, d'après la question précédente, on a

$$G^{-1}(y) = \ln\left(\tan(y) + \sqrt{\tan^2(y)+1}\right)$$

7. Il suffit de tracer la courbe symétrique par rapport à l'axe $y = x$; le graphe résultant doit ressembler (en quelque sorte) à deux cercles qui se touchent.
8. G est une composée, donc on applique la formule pour $u \circ v$:

$$G'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}$$

Pour ce qui est de la réciproque :

— On peut utiliser la formule du cours pour la dérivée d'une réciproque :

$$\left(G^{-1}\right)' = \frac{1}{G'(G^{-1}(x))}$$

Or on a

$$\begin{aligned} e^{\ln(\tan x + \sqrt{\tan^2(x)+1})} &= \tan x + \sqrt{\tan^2(x)+1} \\ e^{-\ln(\tan x + \sqrt{\tan^2(x)+1})} &= \frac{1}{\tan x + \sqrt{\tan^2(x)+1}} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\left(G^{-1}\right)' = \frac{2 + 2\left(\tan x + \sqrt{\tan^2(x)+1} - \frac{1}{\tan x + \sqrt{\tan^2(x)+1}}\right)^2}{\tan x + \sqrt{\tan^2(x)+1} + \frac{1}{\tan x + \sqrt{\tan^2(x)+1}}}$$

On pourrait sans doute développer...

— On peut calculer directement la dérivée ; ça n'est pas si difficile que ça en fait, car on a pour tout $x \in \left]-\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\sqrt{\tan^2(x)+1} = \sqrt{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{\cos(x)}$$

car $\cos(x) \geq 0$. Ainsi $G^{-1}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right)$. On a alors

$$(G^{-1})'(x) = \frac{1 + \tan^2(x) + \frac{-2\sin(x)}{\cos^2(x)}}{\tan x + \frac{1}{\cos(x)}}$$

ce qui est un peu plus propre que précédemment.