DS 05 - 31 janvier

Durée : 3h. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 *(adapté de BCE-ESCP Europe option techno 2017)*

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer M^3 ; en déduire que M n'est pas inversible. *(On raisonnera par l'absurde.)*
   b) Pour tout entier $n \geq 3$, calculer M^n.
   c) Calculer $(I_3 - M)(I_3 + M + M^2)$. En déduire que $(I_3 - M)$ est inversible et donner $(I_3 - M)^{-1}$.
2. On pose $S = M + I_3$.
   a) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice S^n en fonction de I_3, M et M^2. *(On justifiera l'utilisation de la formule du binôme.)*
   b) Déterminer la deuxième colonne de la matrice S^n.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ les trois suites définies par :

$$u_0 = 0, v_0 = 1, w_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n \end{cases}$$

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. En déduire que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.
   b) Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n. Montrer que $u_n + v_n + w_n = 1$.

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de A et en déduire qu'elle est inversible.
2. On souhaite calculer l'inverse de A. On se propose d'utiliser deux méthodes ; les deux questions suivantes sont donc indépendantes. indépendantes.
   a) Calculer A^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.
   b) Montrer que $A^2 = 3A - 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1} en fonction de A et I_3.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et posons $M_\lambda = A - \lambda I_3$.
   a) Discuter et résoudre le système suivant d'inconnues réelles x, y, z :
   $$\begin{cases} (2-\lambda)x - y - 2z &= 0 \\ 2x - (1+\lambda)y - 4z &= 0 \\ -x + y + (3-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$
   b) Pour quelles valeurs de λ la matrice M_λ est-elle inversible ?
   c) Montrer que $M_\lambda^2 = (3-2\lambda)M_\lambda - (\lambda-1)(\lambda-2)I_3$.
   d) En déduire une expression, quand elle existe, de M_λ^{-1} en fonction de A et I_3.
4. a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   b) On pose $D = P^{-1}AP$. Montrer que $D = \mathrm{Diag}(2, 1, 1)$.
5. On souhaite maintenant calculer A^n et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$. On se propose d'utiliser deux méthodes ; les deux questions suivantes sont donc indépendantes.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression explicite de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis l'expression de a_n et b_n.
   b) À l'aide de la question 2.b, déterminer des relations de récurrence reliant a_{n+1} et b_{n+1} à a_n et b_n. Exprimer a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et a_n uniquement, puis en déduire a_n et b_n.
6. Dans cette question on cherche à déterminer toutes les solutions de $X^2 = A$, avec $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$.
   a) Montrer que $AX = XA$; en déduire que $YD = DY$. Montrer alors que Y est diagonale.
   b) Montrer que $Y^2 = D$ et en déduire les valeurs possibles pour Y.
   c) Déterminer les valeurs possibles pour X.

Exercice 3

Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit le plan $\mathcal{P}_m$, donné par son équation cartésienne :

$$m^2x + (2m-1)y + mz = 3$$

1. Déterminer quels sont les plans $\mathcal{P}_m$ passant par $A(1, 1, 1)$.
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_m$ et du plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $y = -3$; on précisera la nature de l'intersection et on en donnera, lorsque cela est possible, une équation paramétrique.
3. Soit la droite $\mathcal{D}$ définie par l'équation paramétrique
   $$\mathcal{D} : \left| \begin{array}{l} x = \quad 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \quad 1 - 5\lambda \end{array} \right. , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
   Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_m$ et de $\mathcal{D}$.
4. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_1$; on précisera la nature de l'intersection et on en donnera une équation paramétrique.
5. Soient m et m' des réels distincts. Quelle est la nature de l'intersection de $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_{m'}$?
6. Montrer qu'il existe un unique point Q appartenant à tous les plans $\mathcal{P}_m$.

Correction de l'exercice 1

1. a) On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $M^3 = 0$. Si M était inversible, on aurait $M^{-1}M^3 = 0$ donc $M^2 = 0$; or d'après notre calcul, ceci est absurde. Ainsi M n'est pas inversible.

b) On a $M^3 = 0$ donc $M^4 = M^3M = 0$, et

$$M^n = M^3M^{n-3} = 0 \times M^{n-3} = 0$$

c) On a

$$\begin{aligned}(I_3 - M)(I_3 + M + M^2) &= I_3 - M + M - M^2 + M^2 - M^3 \\ &= I_3 - M^3 = I_3\end{aligned}$$

On vérifie également que

$$(I_3 + M + M^2)(I_3 - M) = I_3 - M^3 = I_3$$

Ainsi $I_3 - M$ est inversible et son inverse est $I_3 + M + M^2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) Comme l'énoncé nous le souffle, on va utiliser le binôme de Newton ; on peut le faire car M et I_3 commutent ($I_3M = MI_3 = M$). Ceci donne :

$$S^n = (M + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k$$

car $I_3^{n-k} = I_3$ et $M^kI_3 = M^k$. Or d'après la question précédente, M^k est nul dès que $n \geq 3$; ainsi

$$\begin{aligned}S^n &= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} M + \binom{n}{2} M^2 \\ &= I_3 + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2\end{aligned}$$

b) Il suffit de regarder la deuxième colonne de chaque matrice ; on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} \\ -n^2 + 1 \\ \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
S\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3&1&0\\-3&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3u_n+v_n\\-3u_n+w_n\\u_n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix} \qquad \text{d'après la définition de la suite}
\end{aligned}$$

On peut ainsi montrer que « $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix} = S^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$ » par récurrence sur n :

— Initialisation : pour $n=0$, $S^0 = I_n$ et donc $\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$; la propriété est vraie au rang 0.

— Hérédité : supposons la proposition vraie au rang $n-1$ et montrons qu'elle est vraie au rang n. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3u_{n-1}+v_{n-1}\\-3u_{n-1}+w_{n-1}\\u_{n-1}\end{pmatrix} \qquad \text{par définition}\\
&= S\begin{pmatrix}u_{n-1}\\v_{n-1}\\w_{n-1}\end{pmatrix}\\
&= S\times S^{n-1}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix} = S^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où la propriété est vraie au rang n.

4. On connaît S^n d'après la question précédente ; on a alors

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix} = (I_n + nM + \frac{n(n-1)}{2}M^2)\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$$

On pourrait ici chercher à faire le calcul de S^n explicitement, mais il y a mieux à faire : d'après l'énoncé, $\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Lorsqu'on multiplie une matrice par ce vecteur, le résultat est simplement la deuxième colonne ; on peut donc utiliser le résultat de la question 2)b) directement et dire que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ v_n &= -n^2+1 \\ w_n &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait la somme de ces termes, on obtient

$$u_n+v_n+w_n = \frac{n^2+n-2n^2+2+n^2-n}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

(On pouvait également démontrer cette propriété par récurrence pour grapiller des points.

Correction de l'exercice 2

1. On écrit

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Comme la matrice est une matrice 3×3, elle est inversible.

2. a) On souhaite résoudre le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ d'inconnues x_1, x_2, x_3, à l'aide du pivot de Gauss. Cette équation est équivalente au système suivant :

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= y_1 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= y_2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= y_3 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_2 + 4x_3 &= y_1 + 2y_3 \\ x_2 + 2x_3 &= y_2 + 2y_3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= y_3 \end{aligned}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3, L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2x_3 &= y_1 - y_2 \\ x_2 + 2x_3 &= y_2 + 2y_3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= y_3 \end{aligned}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_3 &= \tfrac{y_1 - y_2}{2} \\ x_2 &= y_2 + 2y_3 - y_1 + y_2 \\ x_1 &= y_2 + 2y_3 - y_1 + y_2 + \tfrac{3}{2}(y_1 - y_2) - y_3 \end{aligned}\right.$$

L'inverse de la matrice est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) On calcule A^2 :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 6 & -5 & -12 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} 3A - 2I_3 &= 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 6 & -5 & -12 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} = A^2 \end{aligned}$$

Ainsi $A^2 - 3A = -2I_3$. On a ainsi $I_3 = \frac{1}{2}(3A - A^2)$, et donc $I_3 = A(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A)$; de plus (puisque $AI_3 = I_3A$) on a aussi $I_3 = (\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A)A$. Ainsi A est inversible et

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{-1}{2} & -2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat (heureusement).

3. a) On résout le système à l'aide du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{l}(2-\lambda)x - y - 2z \ = 0\\ 2x-(1+\lambda)y-4z = 0\\ -x+y+(3-\lambda)z \ = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-x+y+(3-\lambda)z \ = 0\\ (2-\lambda)x - y - 2z \ = 0\\ 2x-(1+\lambda)y-4z = 0\end{array}\right. \qquad L_1 \to L_2 \to L_3 \to L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}-x+y+(3-\lambda)z & = 0\\ (1-\lambda)y + ((3-\lambda)(2-\lambda)-2)z & = 0\\ 2x-(1+\lambda)y-4z & = 0\end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + (2-\lambda)L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}-x+y+(3-\lambda)z & = 0\\ (1-\lambda)y + ((3-\lambda)(2-\lambda)-2)z & = 0\\ (1-\lambda)y+(2-2\lambda)z & = 0\end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}-x+y+(3-\lambda)z & = 0\\ ((3-\lambda)(2-\lambda)-2-2+2\lambda)z & = 0\\ (1-\lambda)y+(2-2\lambda)z & = 0\end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}-x+y+(3-\lambda)z & = 0\\ (1-\lambda)y+(2-2\lambda)z & = 0\\ (2-3\lambda+\lambda^2)z & = 0\end{array}\right.$$

Le trinôme $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ a deux racines, qui sont 1 et 2 ; si on suppose $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$, on a trois pivots non-nuls et le système a alors une unique solution ; puisque c'est un système homogène, la solution est alors $(0,0,0)$. Reste à regarder les deux autres cas :

— Si $\lambda = 2$, le système original est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ll}-x+y+z & = 0\\ -y-2z & = 0\\ 0 & = 0\end{array}\right.$$

Ce système a une infinité de solutions, qui sont de la forme $(x, -2z, z)$.

— Si $\lambda = 1$, le système original est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ll}-x+y+2z & = 0\\ 0 & = 0\\ 0 & = 0\end{array}\right.$$

Ce système a une infinité de solutions, de la forme $(y+2z, y, z)$.

b) La matrice M_λ est inversible si et seulement si le système de la question précédente a une unique solution. En effet, le fait d'avoir une unique solution ne dépend que des membres gauches du système ; si l'on remplançait les membres droits du système par y_1, y_2, y_3, on obtiendrait aussi qu'il y a une seule solution (car le pivot de Gauss s'exécuterait de la même façon). Ainsi M_λ est inversible pour $\lambda \notin \{1,2\}$.

c) Deux méthodes :

— En calculant chaque côté séparément :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$M_\lambda^2 = \begin{pmatrix} (2-\lambda)^2 & -(2-\lambda)+(1+\lambda)-2 & -2(2-\lambda)+4-6+2\lambda \\ 4-2\lambda-2-2\lambda+4 & -2+(-1-\lambda)^2-4 & -4+4+4\lambda-12+4\lambda \\ -2+\lambda+2-3+\lambda & 1-1-\lambda+3-\lambda & 2-4+(3-\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+\lambda^2-4\lambda & 2\lambda-3 & 4\lambda-6 \\ 6-4\lambda & \lambda^2+2\lambda-5 & 8\lambda-12 \\ 2\lambda-3 & 3-2\lambda & \lambda^2-6\lambda+7 \end{pmatrix}$$

$$(3-2\lambda)M_\lambda-(\lambda-1)(\lambda-2)I_3$$

$$= \begin{pmatrix} (3-2\lambda)(2-\lambda)-(\lambda-1)(\lambda-2) & 2\lambda-3 & 4\lambda-6 \\ 6-4\lambda & (-1-\lambda)(3-2\lambda)-(\lambda-1)(\lambda-2) & -12+8\lambda \\ -3+2\lambda & 3-2\lambda & (3-2\lambda)(3-\lambda)-(\lambda-1)(\lambda \end{pmatrix}$$

Il suffit de développer les termes de la diagonale pour conclure (les autres étant égaux) :

$$(3-2\lambda)(2-\lambda)-(\lambda-1)(\lambda-2) = 2\lambda^2-4\lambda-3\lambda+6-\lambda^2-2+\lambda+2\lambda = \lambda^2-4\lambda+4$$
$$(-1-\lambda)(3-2\lambda)-(\lambda-1)(\lambda-2) = -3+2\lambda-3\lambda+2\lambda^2-\lambda^2-2+\lambda+2\lambda = \lambda^2+2\lambda-5$$
$$(3-2\lambda)(3-\lambda)-(\lambda-1)(\lambda-2) = 9+2\lambda^2-6\lambda-3\lambda-\lambda^2-2+\lambda+2\lambda = \lambda^2-6\lambda+7$$

Nous avons donc prouvé l'égalité.

— À l'aide uniquement de manipulations de symboles :

$$\begin{aligned} M_\lambda^2 &= (A-\lambda I_3)^2 = A^2-2\lambda A+\lambda^2 I_3 \qquad \text{car } AI_3 = I_3A = A \\ &= 3A-2I_3-2\lambda A+\lambda^2 I_3 \\ (3-2\lambda)M_\lambda-(\lambda-1)(\lambda-2)I_3 &= 3A-2\lambda A-3\lambda I_3+\lambda^2 I_3-\lambda^2 I_3+3\lambda I_3+2I_3 \\ &= 3A-2\lambda A+\lambda^2 I_3-2I_3 \end{aligned}$$

d) On a une relation entre I_3, M et M^2. Comme en TD, on essaie de transformer ceci en une relation dont le second membre est l'identité, pour avoir $AX = I_3$. On a démontré auparavant que M_λ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{1,2\}$; on suppose donc qu'on est dans ce cas. On a alors

$$\begin{aligned} & M_\lambda^2-(3-2\lambda)M_\lambda = (\lambda-1)(\lambda-2)I_3 \\ \text{donc} \quad & \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)}\left(M_\lambda^2-(3-2\lambda)M_\lambda\right) = I_3 \qquad \text{car } \lambda \notin \{1,2\} \\ \text{donc} \quad & M_\lambda\left(\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)}(M_\lambda-(3-2\lambda)I_3)\right) = I_3 \\ \text{et} \quad & \left(\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)}(M_\lambda-(3-2\lambda)I_3)\right)M_\lambda = I_3 \end{aligned}$$

Ainsi M_λ est inversible et $M_\lambda^{-1} = \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)}\left(M_\lambda-(3-2\lambda)I_3\right)$.

4. a) On utilise la méthode du pivot de Gauss pour inverser le système $P\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1+x_2+2x_3 &= y_1 \\ 2x_1+x_2 \quad &= y_2 \\ -x_1+x_3 \quad &= y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1+x_2+2x_3 &= y_1 \\ 2x_1+x_2 \quad &= y_2 \\ x_2+3x_3 &= y_3+y_1 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1+x_2+2x_3 &= y_1 \\ -x_2-4x_3 &= y_2-2y_1 \\ x_2+3x_3 &= y_3+y_1 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2-2L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1+x_2+2x_3 &= y_1 \\ -x_3 \quad &= y_3+y_2-y_1 \\ x_2+3x_3 &= y_3+y_1 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2+L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = & y_1+2y_1-3y_2-4y_3-2y_1+2y_2+2y_3 = y_1-y_2-2y_3 \\ x_3 = & y_1-y_2-y_3 \\ x_2 = & y_3+y_1-3y_1+3y_2+3y_3 = -2y_1+3y_2+4y_3 \end{array}\right.$$

Donc P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

b) Il suffit de calculer le produit :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\2&-1&-4\\-1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\4&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. a) On montre cette proposition par récurrence sur n :
   - Initialisation : pour $n=0$, on a $PD^0P^{-1}=PP^{-1}=I_3=A^0$, donc la proposition est vraie.
   - Hérédité : supposons la propriété vraie pour n et montrons-la pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned} PD^{n+1}P^{-1} &= PD^nDP^{-1} = PD^nP^{-1}APP^{-1} && \text{d'après 4)b)} \\ &= PD^nP^{-1}\times A = A^nA && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est démontrée par récurrence. Or, on a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'après les règles de produit de matrices diagonales ; ainsi

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & -2^n & -2^{n+1} \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & -2^n+1 & -2^{n+1}+2 \\ 2^{n+1}-2 & -2^{n+1}+3 & -2^{n+2}+4 \\ -2^n+1 & 2^n-1 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Au vu de la matrice (par exemple le deuxième coefficient de la troisième ligne) on peut voir une ressemblance avec $(2^n - 1)A$. Voyons voir ce que ça donne :

$$\begin{aligned}
&A^n - (2^n - 1)A \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & -2^n+1 & -2^{n+1}+2 \\ 2^{n+1}-2 & -2^{n+1}+3 & -2^{n+2}+4 \\ -2^n+1 & 2^n-1 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^{n+1}-2 & -2^n+1 & -2^{n+1}+2 \\ 2^{n+1}-2 & -2^n+1 & -2^{n+2}+4 \\ -2^n+1 & 2^n-1 & 3\times 2^n-3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n - 2^{n+1} + 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{n+1}+2+2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2-2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mais comme $2^n - 2^{n+1} = 2^n(1-2) = -2^n$, on trouve dans tous les cas $2 - 2^n$ sur la diagonale ; au final on trouve que

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$$

b) On part de $A^n = a_n A + b_n I_3$, et on multiplie par A :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= a_n A^2 + b_n A \\
&= a_n(3A - 2I_3) + b_n A \\
&= (3a_n + b_n)A - 2a_n I_3
\end{aligned}$$

Ainsi (puisque A n'est pas proportionnelle à l'identité, ou par identification des coefficients) on a $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$. Ainsi

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

Ceci est une relation de récurrence d'ordre 2 ; le polynôme caractéristique associé est $X^2 - 3X + 2$, dont les racines sont 2 et 1. Ainsi $a_n = \lambda 2^n + \mu$. Puisque $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on trouve $2\lambda + \mu = 1$ et $\lambda = -\mu$, d'où $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. Donc

$$\begin{aligned}
&a_n = 2^n - 1 \\
&b_n = -2a_{n-1} = -2(2^{n-1} - 2) = 2 - 2^n
\end{aligned}$$

6. a) Attention il y a une erreur d'énoncé ici ; on n'a pas forcément que la matrice est diagonale ! ! Voici ce qu'on pouvait faire :
On a $AX = X^2X = X^3 = XX^2 = XA$. Ainsi

$$YD = P^{-1}XP \times P^{-1}AP = P^{-1}XAP = P^{-1}AXP = P^{-1}AP \times P^{-1}XP = DY$$

On cherche donc une matrice telle que $YD = DY$; si on pose $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} YD = DY &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut éventuellement utiliser $Y^2 = D$, qui est démontré à la question suivante :

$$Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 + fh & f(e+i) \\ 0 & h(e+i) & i^2 + fh \end{pmatrix}$$

Si $Y^2 = D$, on a $a^2 = 2$, mais surtout

$$\begin{cases} e^2 + fh = 1 \\ f(e+i) = 0 \\ h(e+i) = 0 \\ i^2 + hf = 1 \end{cases}$$

Si $(e+i) \neq 0$, on a $f = 0$ et $h = 0$ et la matrice est donc diagonale. Si $e = -i$, on a $e^2 + fh = i^2 + fh = 1$, et c'est possible (il suffit d'avoir $fh = 1 - e^2$) ; d'où une erreur d'énoncé.

b) On a

$$Y^2 = P^{-1}XP \times P^{-1}XP = P^{-1}X^2P = P^{-1}AP = D$$

On va distinguer deux cas :

— Si Y est diagonale : $Y = \text{Diag}(\alpha, \beta, \gamma)$, on a $\alpha^2 = 2, \beta^2 = 1, \gamma = 1$. Il y a donc 8 possibilités :

$$Y \in \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

— Si Y n'est pas diagonale, on a $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & \frac{1-e^2}{f} & -e \end{pmatrix}$, et $a^2 = 2$ et $e^2 = 1$. Il y a une infinité de solutions car on peut choisir n'importe quel f :

$$Y = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Vu l'erreur d'énoncé, il n'était pas évident de calculer toutes les solutions vu qu'on en avait une infinité (et de 12 formes différentes). Question retirée du barème.

Correction de l'exercice 3

1. On a

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{P}_m &\Leftrightarrow m^2 + (2m-1) + m = 3 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = -4 \end{aligned}$$

Il y en a ainsi deux.

2. On a

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_m &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2x - 3(2m-1) + mz = 3 \\ y = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2x + mz = 6m \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $m = 0$ cette équation est toujours vérifiée ; en fait, on s'aperçoit que $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$. Une équation paramétrique de $\mathcal{P}_0$ est

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Supposons maintenant que $m \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_m &\Leftrightarrow \begin{cases} mx + z = 6 \\ y = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - mx \\ y = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - m\lambda \\ y = -3 \\ x = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci est l'équation paramétrique d'une droite passant par $(0, -3, 6)$ et de vecteur directeur $(1, 0, -m)$.

3. On a

$$M(x,y,z)\in\mathcal{P}_m\cap D \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x+(2m-1)y+mz = & 3\\ x & = 1+\lambda\\ y & = -1+2\lambda\\ z & = 1-5\lambda\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2(1+\lambda)+(2m-1)(-1+2\lambda)+m(1-5\lambda) = & 3\\ x & = 1+\lambda\\ y & = -1+2\lambda\\ z & = 1-5\lambda\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-m-2)\lambda+(m^2-m+1) = & 3\\ x & = 1+\lambda\\ y & = -1+2\lambda\\ z & = 1-5\lambda\end{cases}$$

On a m^2-m-2 pour $m=2$ et $m=-1$; pour ces valeurs, la première équation devient $3=3$, et disparaît donc. On obtient alors l'équation de $\mathcal{D}$; ainsi $D\cap\mathcal{P}_m = D$ pour $m=2$ et $m=-1$. Si on suppose que l'on n'est pas dans ce cas-là, on obtient

$$M(x,y,z)\in\mathcal{P}_m\cap D \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{m-m^2+2}{m^2-m-2} = -1\\ x = 1+\lambda\\ y = -1+2\lambda\\ z = 1-5\lambda\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow M=(0,-3,6)$$

Ainsi l'intersection est réduite à un point.

4. Déjà, pour $m=1$, on se retrouve à calculer $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_1$, qui vaut $\mathcal{P}_1$. Supposons donc que $m\neq 1$:

$$M(x,y,z)\in\mathcal{P}_m\cap\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x+(2m-1)y+mz = 3\\ x+y+z = 3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-m)x+(m-1)y = 3-3m\\ x+y+z = 3\end{cases} \quad Ł_1 \leftarrow L_1 - mL_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx+y = -3\\ x+y+z = 3\end{cases} \quad \text{car } m\neq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3-mx\\ z = 3-x+3+mx\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3-m\lambda\\ z = 6+(m-1)\lambda\\ x = \lambda\end{cases}$$

Ceci est l'équation d'une droite passant par $(0,-3,6)$ et de vecteur directeur $(1,-1,m-1)$.

5. On peut résoudre le système avec un peu d'astuce :

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z) \in \mathcal{P}_m \cap \mathcal{P}_{m'} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m^2x + (2m-1)y + mz \ = 3 \\ m'^2x + (2m'-1)y + mz = 3 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lr} m^2x + (2m-1)y + mz & = 3 \\ (m'^2 - m^2)x + 2(m'-m)y + (m'-m)z & = 0 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m^2x + (2m-1)y + mz = 3 \\ (m+m')x + 2y + z \ = 0 \end{array} \right. \qquad \text{car } m \neq m' \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -mm'x - y \ = 3 \\ (m+m')x + 2y + z = 0 \end{array} \right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 - mL_2 \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -3 - mm'x \\ (m+m')x + 2y + z = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -3 - mm'\lambda \\ z = 6 + 2mm'\lambda - (m+m')\lambda \\ x = \lambda \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

On a donc affaire à une droite passant par $(0,-3,6)$ et de vecteur directeur $(1, -mm', 2mm' - m - m')$.

6. On sait d'après la question précédente que $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_m$ est une droite passant par $(0,-3,6)$ et de vecteur directeur $(1,0,-m)$. Ainsi $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_{-1}$ et $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_{-2}$ sont des droites passant par $(0,-3,6)$ et de vecteur directeur respectifs $(1,0,1)$ et $(1,0,2)$. On a alors

$$
M(x,y,z) \in \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_{-1} \cap \mathcal{P}_{-2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda = \mu \\ y = -3 \\ z = 6 + \lambda = 6 + 2\mu \end{array} \right.
$$

Ce système n'a qu'une solution, pour $\lambda = \mu = 0$; ainsi l'intersection de ces trois plans est le point $(0,-3,6)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que ce point appartient à tous les $\mathcal{P}_m$:

$$
(2m-1) \times (-3) + 6m = -6m + 3 + 6m = 3
$$

Ainsi $(0,-3,6) \in \mathcal{P}_m$ pour tout m et c'est le seul.