DS 06 - 21 février

Durée : 3h30. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On pose $A_0(1,0)$ et $B_0(3,0)$. On utilise le processus suivant pour définir $A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ et $B_{n+1}(x'_{n+1}, y'_{n+1})$ à partir de $A_n(x_n, y_n)$ et $B_n(x'_n, y'_n)$: A_{n+1} est le barycentre du système de points $((A_n, 4), (B_n, 1))$ (où les réels sont des poids), et B_{n+1} le barycentre du système $((A_n, 1), (B_n, 4))$.

1. Calculer y_n et y'_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner deux relations de récurrence faisant intervenir $x_{n+1}, x'_{n+1}, x_n, x'_n$.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x'_n - x_n = 0$, puis que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ.
4. Trouver deux réels α_1, β_1 tels que $(\alpha_1 x_n + \beta_1 x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. De même, trouver α_2 et β_2 tels que $(\alpha_2 x_n + \beta_2 x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
5. En déduire l'expression de x_n, x'_n en fonction de n, puis calculer ℓ.

Exercice 2

Soit $n \geq 2$. Une urne contient 1 boule noire et $n-1$ boules blanches. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième est sans remise... Les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et ceux d'ordre pair s'effectuent avec remise. On pose N_k l'évènement « on obtient la boule noire au k-ème tirage ». On pose $X_k = 1$ si la boule noire est obtenue au k-ème tirage, que ce soit la première fois ou non (et 0 sinon), et on pose X le nombre total d'apparitions de la boule noire.

1. a) Quel est le nombre total de tirages effectués pour vider l'urne ?
   b) Quel est l'ensemble E des valeurs que peut prendre X ?
2. a) Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Combien reste-t-il de boules dans l'urne avant le $(2j+1)-$ème tirage ?
   b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Exprimer l'évènement « $X_{2k+1} = 1$ » à l'aide des évènements N_j. À l'aide de la formule des probabilités composées, en déduire que $\mathbb{P}(X_{2k+1} = 1) = \frac{1}{n}$.
   c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. En procédant de même, déterminer $\mathbb{P}(X_{2k} = 1)$.
3. Démontrer que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!}$.
4. On note $U_{2j-1} =$ « on obtient la boule noire pour la première fois au $(2j-1)-$ème tirage ».
   a) Démontrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a $\mathbb{P}(U_{2j-1}) = \frac{n-j}{n(n-1)}$.
   b) Exprimer l'évènement « $X = 1$ » en fonction des U_{2j-1} et en déduire $\mathbb{P}(X = 1)$.

Exercice 3

(adapté de BCE-BSB option techno 2017)

Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet de la « cage à l'écureuil », une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet. La cage est constituée de 3 niveaux ; l'enfant part du niveau A, puis peut monter au niveau B, puis au sommet, le niveau C. On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instants. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se retrouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

— si l'enfant est au niveau A, à l'instant suivant il passe au niveau B avec probabilité $\frac{2}{3}$;

— si l'enfant est au niveau B, à l'instant suivant il passe au niveau C avec probabilité $\frac{2}{3}$;

— l'enfant ne redescend pas les niveaux, et une fois le sommet atteint, l'enfant y reste.

On pose A_n l'évènement « l'enfant est au niveau A à l'instant n », et a_n la probabilité de cet évènement ; on définit de même B_n, C_n et b_n, c_n.

1. Donner a_1, b_1, c_1.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n, \qquad c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n$$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3^n}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = 3^n b_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2, puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{2n}{3^n}$.
5. Que vaut $a_n + b_n + c_n$? En déduire c_n. Calculer $\lim_{n\to+\infty} c_n$, puis interpréter ce résultat.
6. On note X l'instant où l'enfant atteint le sommet.
   a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
   b) Justifier que $\forall n \geq 2,\ (X = n) = B_{n-1} \cap C_n$.
   c) En déduire pour $n \geq 2$ que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{4(n-1)}{3^n}$.
7. On cherche à calculer $E(X) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k)$. Pour $0 < q < 1$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.
   a) Calculer S_n, puis donner $\ell = \lim_{n\to+\infty} S_n$. *($\ell$ dépend de q.)*
   b) Calculer la dérivée seconde de S_n par rapport à q. Montrer également que la dérivée seconde de ℓ par rapport à q est $\frac{2}{(1-q)^3}$.
   c) En admettant que $\lim_{n\to+\infty} S_n'' = \frac{2}{(1-q)^3}$, calculer $E(X)$, puis interpréter ce résultat.

Exercice 4

(adapté de BCE-ESCP Europe option techno 2017)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
$$u_1 = 1, \qquad v_1 = 2, \qquad \text{et } \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et convergentes.
3. On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} v_n$.
   a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en déduire une relation entre ℓ et ℓ'.
   b) En utilisant la relation $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$, calculer $\ell\ell'$.
   c) Déterminer ℓ et ℓ'.
4. Calculer $\frac{v_n}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression explicite de u_n et v_n.

Correction de l'exercice 1

1. Montrons par récurrence que $y_n = y'_n = 0$:
   — Initialisation : la propriété est vraie au rang 0 ;
   — Hérédité : supposons la propriété vraie pour le rang n et montrons qu'elle est vraie pour le rang $n+1$. On a $y_{n+1} = \frac{4y_n + y'_n}{5} = 0 + 0 = 0$ et $y'_{n+1} = \frac{y_n + 4y_{n+1}}{5} = 0$.

   La propriété est démontrée par récurrence.
2. Par les propriétés du barycentre on a
$$x_{n+1} = \frac{4x_n + x'_n}{5}, \qquad x'_{n+1} = \frac{x_n + 4x'_n}{5}$$
3. On commence par étudier la suite $(x'_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$x'_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + 4x'_n - 4x_n - x'_n}{5} = \frac{3}{5}(x'_n - x_n)$$
   Ainsi cette suite est géométrique de raison $\frac{3}{5}$; sa limite est donc 0 car la raison est < 1. Montrons maintenant la monotonie de chacune des suites :
$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{4x_n + x'_n - 5x_n}{5} = \frac{x'_n - x_n}{5} \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{x'_0 - x_0}{5} = 2\frac{3^n}{5^{n+1}} > 0 \\ x'_{n+1} - x'_n &= \frac{x_n + 4x'_n - 5x'_n}{5} = -\frac{x'_n - x_n}{5} < 0 \end{aligned}$$
   Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus on a $x'_n - x_n > 0$, donc $x'_n > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît (strictement), on a $x_n < x'_n < x'_0 \leq 3$; ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, et converge donc (vers ℓ) d'après le théorème de convergence monotone. De même, $x'_n > x_n > x_0 \geq 1$ car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ; ainsi $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ'. Comme $\lim_{n\to+\infty} x'_n - x_n = 0$, on a $\ell' - \ell = 0$ et les deux suites convergent vers la même limite. [C'est essentiellement la même preuve que le théorème des suites adjacentes, mais cette notion n'étant pas au programme du DS je préfère refaire la preuve en quelques lignes.]
4. On a déjà trouvé, il suffit de prendre $\alpha_1 = -1$ et $\beta_1 = 1$ pour avoir une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$. Pour ce qui est de la suite constante, on aurait
$$\begin{aligned} \alpha_2 x_{n+1} + \beta_2 x'_{n+1} = \alpha_2 x_n + \beta_2 x'_n &\Leftrightarrow \frac{(4\alpha_2 + \beta_2)x_n + (\alpha_2 + 4\beta_2)x'_n}{5} = \alpha_2 x_n + \beta_2 x'_n \\ &\Leftrightarrow \frac{(-\alpha_2 + \beta_2)x_n + (\alpha_2 - \beta_2)x'_n}{5} = 0 \end{aligned}$$
   Il suffit de prendre $\alpha_2 = \beta_2$, par exemple $\alpha_2 = \beta_2 = 1$; ainsi $(x_n + x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à son premier terme, 4.
5. On a $x_n + x'_n = 4$ et $x'_n - x_n = \frac{3^n}{5^n} \times 2$; par somme on obtient
$$x'_n = \frac{1}{2}(4 + 2\frac{3^n}{5^n}), \qquad x_n = \frac{1}{2}(4 - 2\frac{3^n}{5^n})$$
   Ainsi $\ell = 2$.

Correction de l'exercice 2

1. a) On retire une boule pour chaque tirage impair ; la première est retirée au premier tirage, la deuxième au troisième, la troisième au 5ème... Ainsi au $(2k-1)-$ème tirage on a retiré k boules, et il faut ainsi $(2n-1)$ tirages pour retirer les n boules.

   b) Puisqu'on vide l'urne et qu'il n'y a qu'une seule boule noire, la boule noire doit sortir au moins une fois. On maximise le nombre de fois où la boule noire apparaît lorsqu'elle apparaît pour tous les tirages pairs (et est donc remise dans l'urne) et au dernier tirage impair (puisqu'elle est la seule dans l'urne). Puisqu'il y a n tirages impairs et $n-1$ tirages pairs, ceci veut dire que la boule noire peut apparaître au maximum $n-1+1=n$ fois. Ainsi $X \in [\![1,n]\!]$.

2. a) Avant le $(2j+1)$-ème tirage, on a fait $2j$ tirages (j de numéro pair et j de numéro impairs) ; ainsi on a retiré j boules de l'urne, et il en reste donc $n-j$.

   b) On a $X_{2k+1}=1$ si et seulement si la boule noire sort au tirage numéro $2k+1$. Or si la boule noire sort lors d'un tirage au numéro impair avant le $(2k+1)$-ème, elle est retirée de l'urne, et ne peut donc pas ressortir au tirage numéro $2k+1$. Ainsi

$$\begin{aligned}X_{2k+1}=1 &= \text{ la boule noire ne sort pas au tirage 1, ni au 3, \ldots, ni au 2k-1, mais sort au 2k+1 è}\\ &= \overline{N_1}\cap\overline{N_3}\cap\ldots\cap\overline{N_{2k-1}}\cap N_{2k+1}\end{aligned}$$

   D'après la formule des probabilités composées on a

$$\mathbb{P}(X_{2k+1}=1)=\mathbb{P}(\overline{N_1})\times\mathbb{P}(\overline{N_3}|\overline{N_1})\ldots\mathbb{P}(N_{2k+1}|\overline{N_1}\cap\ldots\cap\overline{N_{2k-1}})$$

   D'après la question précédente avant le $2\ell+1$-ème tirage il reste $n-\ell$ boules ; ainsi si on suppose $\overline{N_1}\cap\ldots\cap\overline{N_{2\ell-1}}$, on a retiré ℓ boules blanches, et il reste 1 boule noire et $n-1-\ell$ boules blanches. Les tirages se font selon une loi uniforme ; ainsi

$$\mathbb{P}(\overline{N_{2\ell+1}}|\overline{N_1}\cap\ldots\cap\overline{N_{2\ell-1}})=\frac{n-1-\ell}{n-\ell}$$

   Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{2k+1}=1)=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\ldots\frac{n-1-\ell}{n-\ell}\ldots\frac{n-(k-1)-1}{n-(k-1)}\times\frac{1}{n-k}$$

   Par téléscopage, on obtient $\mathbb{P}(X_{2k+1}=1)=\frac{n-k}{n}\times\frac{1}{n-k}=\frac{1}{n}$.

   c) L'évènement $X_{2k}=1$ correspond à la situation où au premier, troisième, ..., $(2k-1)-$ème tirage on n'a pas tiré la boule noire, mais on la tire au $2k$-ème tirage. La situation est exactement la même que la précédente, car le contenu de l'urne n'est pas changé par le $2k$-ème tirage ; ainsi $\mathbb{P}(N_{2k}|\overline{N_1}\cap\ldots\cap\overline{N_{2k-1}})=\frac{1}{n-k}$, et on a

$$\mathbb{P}(X_{2k}=1)=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\ldots\frac{n-1-\ell}{n-\ell}\ldots\frac{n-(k-1)-1}{n-(k-1)}\times\frac{1}{n-k}=\frac{1}{n}$$

3. L'évènement $X=n$ correspond au fait de tirer la boule noire à chaque tirage pair, mais jamais pendant un tirage impair sauf le dernier. Ainsi

$$(X=n)=\overline{N_1}\cap N_2\cap\overline{N_3}\cap\ldots\cap N_{2j-2}\cap N_{2j-1}$$

D'après la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) &= \mathbb{P}(N_1)\,\mathbb{P}(N_2|N_1)\dots\mathbb{P}(N_{2j-2}|\overline{N_1}\cap N_2\cap\overline{N_3}\dots\cap\overline{N_{2j-3}})\times\mathbb{P}(N_{2j-1}|\overline{N_1}\cap N_2\cap\overline{N_3}\dots\cap\overline{N_{2j-}}\\ &= \frac{n}{n-1}\times\frac{1}{n-1}\times\frac{n-1}{n-2}\times\frac{1}{n-2}\times\dots\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\\ &= \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n-2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n-2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{n!}\qquad\text{par téléscopage}\end{aligned}$$

4. a) On a $U_{2j-1}=\overline{N_1}\cap\overline{N_2}\cap\dots\cap\overline{N_{2j-2}}\cap N_{2j-1}$. On utilise une fois de plus la formule des probabilités composées pour trouver :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_{2j-1}) &= \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-3}{n-2}\dots\frac{n-j}{n-j+1}\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j+1}\\ &= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times(n-j)\qquad\text{après téléscopage}\end{aligned}$$

b) On a $X=1$ si et seulement si un des évènements U_{2j-1} se produit ; ces évènements sont de plus disjoints, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1) &= \sum_{j=1}^{k-1}U_{2j-1}\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{n-j}{n(n-1)}\\ &= \sum_{p=1}^{n-1}\frac{p}{n(n-1)}\qquad\text{avec le changement d'indice } p\leftarrow n-j\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{p=1}^{n-1}p=\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}\times\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3

1. a_1 est la probabilité que l'enfant soit toujours au niveau A, soit $\frac{1}{3}$. b_1 est la probabilité qu'il soit monté au niveau B, soit $\frac{2}{3}$. c_1 est la probabilité qu'il soit monté au sommet, ce qu'il ne peut pas faire en un seul intervalle de temps : $c_1=0$.
2. L'enfant étant soit en A, soit en B, soit en C à n'importe quel instant, (A_n,B_n,C_n) forme un système complet d'évènements. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales à A_{n+1} :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)+\mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)+\mathbb{P}(C_n)\,\mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\\ &= a_n\times\frac{1}{3}+b_n\times 0+c_n\times 0\qquad\text{car l'enfant ne redescend pas}\\ &= \frac{1}{3}a_n\end{aligned}$$

De même, en appliquant la formule à B_{n+1} et C_{n+1} :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(B_{n+1}|A_n) + \mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) + \mathbb{P}(C_n)\,\mathbb{P}(B_{n+1}|C_n) \\
&= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + 0 \times c_n \\
\mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(C_{n+1}|A_n) + \mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}(C_{n+1}|B_n) + \mathbb{P}(C_n)\,\mathbb{P}(C_{n+1}|C_n) \\
&= 0 \times a_n + \frac{2}{3}b_n + 1 \times c_n
\end{aligned}$$

car l'enfant reste au sommet de la cage une fois atteinte.

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$; ainsi $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times a_0$. Comme $a_0 = 1$ car l'enfant démarre au niveau A, on a bien $a_n = \frac{1}{3^n}$.
4. On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} = 3^{n+1}b_{n+1} &= 3^{n+1}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n\right) \\
&= \frac{2 \times 3^{n+1}}{3^n} + \frac{3^{n+1}}{3}b_n \qquad \text{d'après la question précédente} \\
&= 3^n b_n + 2 = v_n + 2
\end{aligned}$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2 ; on a donc $v_n = 2n + v_0 = 2n + 3^0 \times 0 = 2n$. Ainsi $b_n = \frac{v_n}{3^n} = \frac{2n}{3^n}$.

5. Puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, on a $a_n + b_n + c_n = 1$. Ainsi

$$c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \frac{1}{3^n} - \frac{2n}{3^n} = \frac{3^n - 1 - 2n}{3^n}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3^n} = 0$ par croissances comparées, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 : l'enfant atteindra le sommet de la cage au bout d'un temps suffisamment long.

6. a) Puisque l'enfant commence au niveau A, il ne pourra atteindre le niveau C qu'au mieux à l'instant 2 ; ainsi X peut prendre toutes les valeurs entières supérieures à 2.

   b) L'évènement « $X = n$ » correspond à « le premier instant auquel l'enfant est au sommet est l'instant n », ou encore « l'enfant vient d'atteindre le sommet à l'instant n » ; ainsi l'enfant n'était pas au sommet à l'instant $n-1$ mais l'est à l'instant n. Comme on ne peut pas atteindre le niveau C depuis le niveau A, l'enfant était nécessairement au niveau B à l'instant $n-1$; ainsi $(X = n) = B_{n-1} \cap C_n$.

   c) Pour calculer $\mathbb{P}(B_{n-1} \cap C_n)$, on peut utiliser la formule du conditionnement (puisque aucun de ces évènements n'est de probabilité nulle) :

$$\mathbb{P}(B_{n-1} \cap C_n) = \mathbb{P}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}(C_n \mid B_{n-1}) = \frac{2}{3}\,\mathbb{P}(B_{n-1}) = \frac{2 \times 2(n-1)}{3 \times 3^{n-1}} = \frac{4(n-1)}{3^n}$$

7. a) S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison différente de 1 ; ainsi $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Lorsque n tend vers l'infini, q^n tend vers 0 car $|q| < 1$; ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

b) La dérivée d'une somme étant la somme des dérivées ($(f+g)' = f' + g'$), on a

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} (q^n)' = \sum_{k=0}^{n} nq^{n-1} = \sum_{k=1} nq^{n-1}$$
$$S''_n = \sum_{k=1}^{n} (n-1)nq^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)q^{n-2}$$

D'autre part

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \left((1-q)^{-1}\right)' - \frac{-1}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{car } (u \circ v)' = v' \times u' \circ u$$
$$\left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \left((1-q)^{-2}\right)'' = -(-2)(1-q)^{-3} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

c) On écrit

$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k\frac{4(k-1)}{3^k} = 4\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

La somme correspond quasiment exactement à la somme que l'on a calculée à la question précédente avec $q = \frac{1}{3}$; en fait, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \frac{4}{9}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$$

Sa limite est donc exactement

$$E(X) = \frac{4}{9}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{4}{9}\frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3}$$
$$= \frac{8\times 27}{9\times 8} = 3$$

Ainsi en moyenne l'enfant mettra 3 instants à escalader la cage à l'écureuil.

Correction de l'exercice 4

1. Montrons la propriété par récurrence sur n :
   — Initialisation : on a $u_1 = 1 > 0$ et $v_1 = 2 > 0$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   — Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n et montrons-la au rang $n+1$. On a $u_n + v_n > 0$ donc on peut diviser par $u_n + v_n$, et de plus ce dénominateur est strictement positif. De plus $u_n^2 > 0$, donc $u_{n+1} > 0$; enfin, $v_n^2 > 0$ et donc $v_{n+1} > 0$.

   La propriété est démontrée par récurrence.
2. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n}$$
$$= \frac{-u_n v_n}{u_n + v_n} < 0 \qquad \text{car } u_n > 0, v_n > 0$$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n + v_n - u_n}{u_n + v_n}$$
$$= 1 - \frac{u_n}{u_n - v_n} \leq 1 \qquad \text{car } u_n > 0, v_n > 0$$

Ainsi ces suites sont décroissantes. Comme elles sont minorées par 0, d'après le théorème de convergence monotone elles convergent.

3. a) On a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)(u_n - v_n)}{u_n + v_n} = u_n - v_n$$

Ainsi la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $u_1 - v_1 = -1$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ on obtient $\ell - \ell' = -1$.

b) On a $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$ par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = \ell^2, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$$

d'après les propriétés de manipulation des limites. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, on obtient en passant à la limite dans cette relation

$$\ell(\ell + \ell') = \ell^2 \Rightarrow \ell\ell' = 0$$

c) On a $\ell\ell' = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\ell' = 0$. Si $\ell' = 0$ on aurait $\ell = -1$ d'après la question 3)a) ; or la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, donc sa limite ne peut pas être -1 (en effet, sinon à partir d'un certain rang v_n devrait être $\leq \frac{-1}{2}$, ce qui est impossible). Ainsi on a $\ell = 0$ et $\ell' = 1$.

4. On a

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{\frac{u_n^2}{u_n+v_n}}{\frac{v_n^2}{u_n+v_n}} = \frac{u_n^2}{v_n^2} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^2$$

Ainsi

$$\frac{u_2}{v_2} = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^2 = 2^{-2}, \qquad \frac{u_3}{v_3} = 2^{-4}, \qquad \frac{u_4}{v_4} = 2^{-8}$$

On peut alors montrer par récurrence que $\frac{u_n}{v_n} = 2^{-2^{n-1}}$. [Autre façon : en prenant le ln dans la relation de récurrence sur $\frac{u_n}{v_n}$, on obtient $\ln\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = 2\ln\frac{u_n}{v_n}$; ainsi la suite des logarithmes est géométrique de raison 2 et $\ln\frac{u_n}{v_n} = 2^{n-1}\ln\frac{u_1}{v_1}$; on passe ensuite à l'exponentielle.] Sachant de plus que $u_n - v_n = -1$, on a $\frac{u_n}{v_n} - 1 = \frac{-1}{v_n}$, et donc $v_n = \frac{-1}{\frac{u_n}{v_n} - 1}$. Au final

$$v_n = \frac{-1}{2^{-2^{n-1}} - 1} = \frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}} - 1}, \qquad u_n = \frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}} - 1} - 1 = \frac{1}{2^{2^{n-1}} - 1}$$