DS 07 - 4 avril

Durée : 4h. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$x_0 > 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1}$$

1. a) Étudier la fonction $f : x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x-1}$ sur $]1;+\infty[$.
   b) Déterminer le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $]1;+\infty[$.
2. a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $x_n > 1$.
   b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelles sont les valeurs possibles pour sa limite ?
   c) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle diverge vers $+\infty$.
3. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq n + 1$.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_{n+1} - x_n - 1 \leq \frac{1}{n}$.
   c) En déduire que

   $$\forall n \geq 2,\ 0 \leq x_n - x_1 - (n-1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

   d) Montrer que $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
   e) Établir alors que $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
   f) En déduire que $\forall n \geq 2$, $n + 1 \leq x_n \leq x_1 + n + \ln(n-1)$, puis un équivalent de x_n.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$.
5. On veut montrer le théorème suivant : si g est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et telle que $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \ell$, alors g est dérivable en 0 et $g'(0) = \ell$.

   a) Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe $c_x \in]0;x[$ tel que $\frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(c_x)$.
   b) En déduire que $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \ell$. Conclure.
6. On considère la fonction $\phi(x) = (1-\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}$, définie pour $x \geq 0$.
   a) Justifier que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   b) Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner $\phi'(0)$.
   c) En déduire que $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{x} = \frac{-1}{2}$.
   d) En déduire la limite de $\frac{e^x-1-xe^x}{x^2}$ quand $x \to 0^+$.
7. Déduire de ce qui précède que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et préciser $f'(0)$.
8. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}^{*+}$. *(On pourra passer par l'étude de $g : x \mapsto e^x - xe^x - 1$.)*
9. Dresser le tableau de variations de f en incluant les limites aux bornes.

Problème

(adapté de TPC 2017)

On note $I =]-1;+\infty[$. Soit f définie sur I par $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x(1+x)} & \text{si } x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit ϕ définie sur $[-1;+\infty[$ par $\phi(x) = e^{-x}(x^2+3x+1) - (1+2x)$.

1. Calculer les dérivées ϕ' et ϕ'' et préciser les valeurs $\phi'(0)$ et $\phi''(0)$.
2. Étudier les variations de ϕ sur I. On étudiera la limite de ϕ' en $+\infty$.
3. En déduire que ϕ est strictement négative sur $[-1;0[$ et sur $]0;+\infty]$.

Partie 2 : Étude de la fonction

1. Montrer que f est continue sur I.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{0\}$ et calculer sa dérivée. *(Dans la suite du problème on admet que f est en fait $\mathcal{C}^1$ sur I tout entier.)*
3. Montrer que la fonction f est strictement monotone sur I.
4. Soit g définie sur I par $g(x) = f(x) - x$.
   a) Déterminer le sens de variation de g.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$.
   c) Montrer que $\frac{4}{10} \leq \alpha \leq \frac{6}{10}$. *(On donne $e^{-4/10} \simeq 0,67$ et $e^{-6/10} \simeq 0,549$.)*
   d) Déterminer le signe de g sur I.

Partie 3 : Étude d'une suite

On admet que f' est strictement croissante sur I. On donne de plus $f'(0,4) \simeq -0.695$, $f'(0,6) \simeq -0,436$, $f(0,4) \simeq 0,589$, $f(0,7) \simeq 0.423$.

1. Montrer que $\forall x \in [0,4;0,7]$, $|f'(x)| \leq 0,8$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0,7$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,4;0,7]$.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,8|u_n - \alpha|$.
   c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction de l'exercice 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$x_0 > 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1}$$

1. a) La fonction f est définie et dérivable sur cet intervalle. On a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

   Cette dérivée est positive si et seulement si $\frac{1}{(x-1)^2} < 1$, si et seulement si $x - 1 > 1$; ainsi f est décroissante sur $]1; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$. Sa limite en 1 est $+\infty$ car $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$; sa limite en $+\infty$ est $+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$. Sa valeur en 2 est 4.

   b) La dérivée de g est

$$g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

   Ainsi g est décroissante ; sa limite en 1^+ est $+\infty$ pour les mêmes raisons que précédemment, et sa limite en $+\infty$ est 1. On en déduit alors que g est toujours positive.

2. a) Nous allons démontrer par récurrence la proposition $\mathcal{P}(n) =$« x_n est définie et $x_n > 1$ » :
   - Initialisation : c'est vrai pour x_0.
   - Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. x_{n+1} est bien définie car $x_n - 1 \neq 0$ (car $x_n > 1$) ; de plus, $x_{n+1} - 1 = x_n + \frac{1}{x_n - 1} > 0$ car $x_n > 1$. Ainsi $x_{n+1} > 1$.

   La propriété est démontrée par récurrence.

   b) Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell)$ car f est continue. On a donc $f(\ell) = \ell$, et donc

$$\begin{aligned} \ell = \ell + 1 + \frac{1}{\ell - 1} &\Leftrightarrow \frac{1}{\ell - 1} = -1 \\ &\Leftrightarrow \ell - 1 = -1 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \end{aligned}$$

   Ainsi si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge c'est vers 0.

   c) Puisque g est toujours (strictement) positive, on a $f(x) > x$ (ou $f(x) \geq x$). Ainsi puisque $x_{n+1} = f(x_n)$ on a $x_{n+1} > x_n$ et la suite est croissante. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, d'après le théorème de la limite monotone $\lim_{n\to+\infty} x_n$ existe (et est finie si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge). Par passage à la limite dans "$x_n > 1$" on obtient $\ell \geq 1$; puisque si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge c'est vers 0, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge on a $0 \geq 1$, ce qui est absurde. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas ; elle diverge donc vers $+\infty$ (puisque la suite est croissante).

3. a) On va montrer que $x_n \geq n + 1$ par récurrence sur n :
   - $x_0 \geq 0 + 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;

— Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc $x_n \geq n+1$. Alors

$$x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1} \geq n + 2 + \frac{1}{x_n - 1}$$

Comme $x_n > 1$ (d'après la question 2), $\frac{1}{x_n-1} > 0$ et donc $x_{n+1} \geq n+2$.

b) On a $x_{n+1} - x_n - 1 = \frac{1}{x_n-1}$ d'après la relation de récurrence. On a $x_n > 1$ donc $\frac{1}{x_n-1} > 0$; de plus, $x_n \geq n+1$ donc $x_n - 1 \geq n$; comme la fonction $x \to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\frac{1}{x_n-1} \leq \frac{1}{n}$, ce qui prouve ce que l'on veut.

c) La question précédente a démontré que

$$\begin{aligned}
&0 \leq x_2 - x_1 - 1 \leq 1 \\
&0 \leq x_3 - x_2 - 1 \leq \frac{1}{2} \\
&\ldots \\
&0 \leq x_n - x_{n-1} - 1 \leq \frac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

En sommant ces inégalités on a

$$0 \leq x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1} - (n-1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}$$

Par téléscopage des x_i on trouve

$$0 \leq x_n - x_1 - (n-1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

d) Posons $F : x \to \ln(1+x) - x$ (définie sur $]-1;+\infty[$) et montrons que cette fonction est négative. F est continue et même dérivable par addition de fonctions dérivables ; on a

$$\begin{aligned}
F'(x) = \frac{1}{1+x} - 1F'(x) \geq 0 \qquad &\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \geq 1 \\
&\Leftrightarrow 1 + x \leq 1 \qquad \text{par décroissance de la fonction inverse} \\
&\Leftrightarrow x \leq 0
\end{aligned}$$

Ainsi F est croissante sur $]-1;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$. La fonction F' s'annule en 0, et cette annulation se fait avec un changement de signe ; ainsi F a un maximum local en 0. C'est également un maximum global, puisque :

— Si $x \in]-1;0]$, F est croissante et on a $F(x) \leq F(0)$;

— Si $x \in [0;+\infty[$, F est décroissante et on a $F(x) \leq F(0)$.

Ainsi $F(x) \leq F(0)$ pour tout x de l'ensemble de définition ; comme $F(0) = 0$ ceci prouve que F est négative, et donc que $\ln(1+x) \leq x$.

e) Si on ne touche à rien on a

$$\ln(k) - \ln(k-1) = \ln(\frac{k}{k-1}) = \ln(1 + \frac{1}{k-1})$$

Comme $\frac{1}{k-1} > -1$ on a $\ln k - \ln(k-1) \leq \frac{1}{k-1}$; mais ça ne va pas, puisque l'inégalité est dans le mauvais sens (et qu'on a $\frac{1}{k-1}$ au lieu de $\frac{1}{k}$). Pour renverser tout ça, on écrit

$$\ln(k-1) - \ln(k) = \ln(\frac{k-1}{k}) = \ln(1 - \frac{1}{k})$$

Comme $k \geq 2$ on a $-\frac{1}{k} > -1$, et donc $\ln(1-\frac{1}{k}) \leq -\frac{1}{k}$. Ainsi

$$\ln(k-1) - \ln(k) \leq -\frac{1}{k} \Leftrightarrow \ln(k) - \ln(k-1) \geq \frac{1}{k}$$

f) D'après la question a) on a $n+1 \leq x_n$. D'après la question c :

$$\begin{aligned}
x_n - x_1 - (n-1) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) - \ln(k-1) \qquad \text{d'après la question e)} \\
&\leq 1 + \ln(n-1) - \ln(1) \qquad \text{par téléscopage}
\end{aligned}$$

Ainsi $x_n \leq x_1 + n - 1 + 1 + \ln(n-1) = x_1 + n + \ln(n-1)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
n+1 \leq x_n \leq x_1 + n + \ln(n-1) \\
\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_1}{n} + 1 + \frac{\ln(n-1)}{n}
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n-1)}{n} = 0$ par croissances comparées, les inégalités de gauche et de droite tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$; par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1, \qquad \text{donc } x_n \sim n$$

Correction de l'exercice 2

1. La fonction $x \to x$ est un polynôme, et elle est donc $\mathcal{C}^\infty$. La fonction $x \to e^x - 1$ est également $\mathcal{C}^\infty$ en tant que somme ; de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a $e^x - 1 > 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble. Ainsi f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que quotient.
2. D'après la question précédente f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Il ne reste plus qu'à démontrer la continuité en 0. On utilise le fait que la fonction ressemble à un taux d'accroissement :

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \xrightarrow{x\to 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

   Ainsi $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1$. Comme on a défini $f(0) = 1$ on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ et f est donc aussi continue en 0.
3. Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$; c'est donc une forme indéterminée. On a $e^x - 1 \sim_{+\infty} e^x$, donc $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x}{e^x}$. On a alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.

4. On a

$$f'(x) = \frac{1 \times (e^x - 1) - x(e^x)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$$

5. a) On a $\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$. Comme g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c_x \in]0; x[$ tel que $g'(c_x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

   b) On a $0 < c_x < x$; ainsi $\lim_{x\to 0} c_x = 0$ par le théorème des gendarmes. En passant à la limite quand x tend vers 0 dans l'égalité on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} f'(c_x) = \ell$$

   par composition des limites. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = \ell$.

6. a) Les fonctions $x \to \sqrt{x}$ et $x \to e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ donc ϕ l'est aussi en tant que composée et produit. De plus $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ uniquement (et $x \to e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$) ; ainsi ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que composée et produit. Les dérivées de $\sqrt{x}$ et e^x sont définies et continues sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc ϕ est $\mathcal{C}^1$ en tant que composée et produit.

   b) Il nous reste à prouver que ϕ est dérivable en 0 et que la dérivée y est continue ; pour cela on va utiliser le théorème de la question précédente (ϕ est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc on peut l'utiliser). Commençons par calculer la dérivée de ϕ :

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{-1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + (1-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \qquad \text{car } (e^u)' = u'e^u \\ &= \frac{-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

   On a $\lim_{x\to 0^+} \phi'(x) = \frac{-1}{2}$. Ainsi, on a bien toutes les hypothèses du théorème : ϕ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = \frac{-1}{2}$. De plus, la conclusion de ce théorème dit que $\phi'(0) = \lim_{x\to 0^+} \phi'(x)$, ce qui montre bien que la dérivée de ϕ est continue en 0 : ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ tout entier.

   c) Par définition de la dérivée de ϕ :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x-0} = \phi'(0) = -\frac{1}{2}$$

   Comme $\phi(0) = 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} &= \frac{(1-\sqrt{x})e^{\sqrt{x}} - 1}{x} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{x}\end{aligned}$$

   Cette fraction tend vers $\frac{-1}{2}$ d'après ce qui précède.

   d) On a $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, et donc $\lim_{x\to 0} f(x^2) = \lim_{x\to 0} f(x)$ par composition des limites (et parce que la limite existe, donc est égale à la limite en 0^+). Ainsi, en appliquant ce qui précède à ϕ, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\phi(x^2) &= \lim_{x\to 0}\phi(x)\\
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{x}\\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

7. D'après la question 4, on a $f'(x)=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$ pour $x>0$. La question 5 montre que si f' admet une limite en 0, alors $f'(0)$ existe et est égal à cette limite ; de plus, dans ce cas on aura $f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x)$, ce qui montre que f' est continue en 0. D'après l'expression de f', on voit que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ en tant que quotient de fonctions continues (et le dénominateur ne s'annulant pas). Ainsi, si l'on montre que f' admet une limite en 0, on aura montré que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Calculons cette limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{x^2}\times\frac{x^2}{(e^x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{x^2}\times\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^2\\
\text{or}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\exp'(0)=e^0=1\\
\text{donc}\qquad \lim_{x\to 0}f'(x) &= \frac{-1}{2}\times 1=\frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Ceci prouve que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ tout entier et que $f'(0)=\frac{-1}{2}$. (Le calcul de limites peut aussi se rédiger avec des équivalents : $e^x-1-xe^x\sim_0 -\frac{1}{2}x^2$ et $e^x-1\sim_0 x$.)

8. D'après l'expression de f', le signe de f' est déterminé par le signe du numérateur puisque le dénominateur est un carré. On étudie ainsi $g: x\mapsto e^x-xe^x-1$; sa dérivée est

$$g'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$$

Cette dérivée est négative pour $x>0$; ainsi g est décroissante. On a $g(0)=e^0-0\times e^0-1=1-1=0$. Ainsi $g(0)=0$ et $g'(0)\le 0$; on a $g'(x)\le 0$ pour tout $x>0$ (c'est une conséquence du théorème des accroissements finis : pour $x>0$, $\frac{g(x)-0}{x-0}=g'(c)\le 0$.) Ainsi f' est négative.

9. En collectant toutes les informations, f' est (strictement) négative donc f est (strictement) décroissante, sa limite en 0 est 1, sa limite en $+\infty$ est 0. On peut tracer le tableau de variations.

Correction du problème

Partie 1

1. On écrit

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= e^{-x}(2x+3)-e^{-x}(x^2+3x+1)-2=e^{-x}(-x^2-x+2)-2\\
\phi'(0) &= e^{-0}(-0-0+2)-2=0\\
\phi''(x) &= e^{-x}(-2x-1)-e^{-x}(-x^2-x+2)=e^{-x}(x^2-x-3)\\
\phi''(0) &= -3
\end{aligned}$$

2. Il faut pour cela étudier le signe de ϕ', et vu son expression et la question d'avant, on va étudier le signe de ϕ''. On a

$$\begin{aligned}\phi''(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 - x - 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1+\sqrt{13}}{2}\end{aligned}$$

car $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < -1$ car $\sqrt{13} > 3$. Ainsi ϕ' est décroissante puis croissante ; elle a un minium local (et global) en $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. On a $\phi'(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x) = -2$ car $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(-x^2 - x + 2) = 0$ par croissances comparées. Ainsi ϕ' est négative sur $[0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}]$ (car elle est décroissante sur cet intervalle, donc si $0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ on a $\phi'(x) \leq \phi'(0) \leq 0$), négative sur $[\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty[$ (car $\phi'(x) \leq \lim_{x\to+\infty} \phi'(x) < 0$) et positive sur $[-1; 0]$ (car $x \leq 0 \Leftrightarrow \phi(x) \geq \phi(0)$ sur cet intervalle). Au final, ϕ est croissante sur $[-1; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

3. D'après l'étude réalisée à la question précédente, ϕ' ne s'annule qu'une seule fois, en 0 ; ainsi le seul extrémum potentiel de ϕ est en 0. Or, en 0, ϕ' s'annule avec changement de signe (positif puis négatif) ; c'est donc bien un extrémum, et même un maximum local. De plus, c'est un maximum global, car ϕ est strictement croissante sur $[-1; 0]$ (donc $x < 0 \Rightarrow \phi(x) < \phi(0)$) et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ (donc $x > 0 \Rightarrow \phi(x) < \phi(0)$). Comme $\phi(0) = 0$, ceci veut dire que $\phi(x) < 0$ pour tout $x \in [-1; +\infty[\backslash\{0\}$.

Partie 2

1. L'expression de f fait apparaître une forme indéterminée ; cependant, on a, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x(1+x)} = e^{-x} \times \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{1+x}$$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} &= 1, \qquad \lim_{x\to 0} e^{-x} = e^{-0} = 1\end{aligned}$$

ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et f est bien continue.

2. Pour $x \neq 0$ la fonction f est dérivable en tant que produit et quotient de fonctions dérivables. On a

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{e^{-x}(x + x^2) - (1 - e^{-x})(2x+1)}{x^2(1+x)^2} \\ &= \frac{e^{-x}(x + x^2 + 2x + 1) - (2x+1)}{x^2(1+x)^2} \\ &= \frac{e^{-x}(x^2 + 3x + 1) - (2x+1)}{x^2(1+x)^2} = \frac{\phi(x)}{x^2(1+x)^2}\end{aligned}$$

On a déjà montré que ϕ est continue ; le dénominateur est une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]-1; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$. Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

3. D'après la question 3 de la partie 1, $\phi(x) < 0$ pour $x \neq 0$; ainsi $f'(x) < 0$ pour $x \neq 0$. Comme on a admis que f est $\mathcal{C}^1$ sur I, $f'(0)$ existe ; par continuité de la dérivée on a $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) \leq 0$. On sait qu'une fonction de dérivée strictement négative sauf en un nombre fini de points est strictement décroissante (c'est une conséquence des accroissements finis) ; puisque f' s'annule en au plus un point (0), f est strictement décroissante sur I.
4. a) On a

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{\phi(x) - x^2(1+x)^2}{x^2(1+x)^2}$$

Or d'après la question I)3), $\phi(x) < 0$; ainsi $\phi(x) - x^2(1+x)^2 < 0$ car on retire quelque chose de positif. Ainsi $g'(x) < 0$, et g est strictement décroissante sur I.

b) On a $g(0) = f(0) - 0 = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{e^x}}{x(1+x)} = 0$; la fonction g est de plus continue sur I car f l'est. Ainsi, par le corollaire des valeurs intermédiaires (ou en disant que par définition de "la limite est $-\infty$", les valeurs de g deviennent plus petites que n'importe quelle valeur négative à partir d'un moment, et donc négatives), il existe $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. De plus, ce α est unique car la fonction est strictement décroissante : si il existe $\alpha' \neq \alpha$, par exemple $\alpha' < \alpha$, alors on aurait $0 > 0$ (en appliquant g des deux côtés de l'inégalité), ce qui est absurde. Au final, il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$.

c) On a

$$\begin{aligned} g(\frac{4}{10}) &= \frac{1 - e^{-4/10}}{\frac{4}{10}\frac{14}{10}} - \frac{4}{10} \\ &= \frac{100}{64}(1 - e^{-4/10}) - \frac{4}{10} \\ &= \frac{500 - 500e^{-4/10} - 128}{320} \\ &= \frac{372 - 500e^{-4/10}}{320} \end{aligned}$$

Or l'énoncé donne $e^{-4/10} \simeq 0,67$, et $\frac{372}{500} = \frac{744}{1000} = 0,744$; ainsi $\frac{372}{500} \geq e^{-4/10}$, et $g(\frac{4}{10}) \geq 0$. Ensuite,

$$\begin{aligned} g(\frac{6}{10}) &= \frac{1 - e^{-6/10}}{\frac{6}{10}\frac{16}{10}} - \frac{6}{10} \\ &= \frac{100}{96}(1 - e^{-6/10}) - \frac{6}{10} \\ &= \frac{1000 - 6 \times 96 - 1000e^{-6/10}}{960} \\ &= \frac{1000 - 600 + 24 - 1000e^{-6/10}}{960} \\ &= \frac{424 - 1000e^{-6/10}}{960} \end{aligned}$$

Or l'énoncé donne $e^{-6/10} \simeq 0,549$, et $\frac{424}{1000} = 0,424$; ainsi $e^{-6/10} \geq \frac{424}{1000}$ et donc $g(\frac{6}{10}) \leq 0$. Comme f est continue sur $[0,4; 0,6]$, on peut appliquer le TVI pour dire que g s'annule sur cet intervalle ; comme g ne s'annule qu'une seule fois sur I d'après la question précédente, $\alpha \in [0,4; 0,6]$.

d) Comme α est le seul point d'annulation sur I de g, g est de signe constant sur $]-1;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$; si il n'était pas de signe constant, on pourrait appliquer le TVI et trouver un autre point d'annulation de g. Comme $0,4\in]-1;\alpha[$ et $g(0,4)>0$, c'est que g est positive sur $]-1;\alpha[$; comme $0,6\in]\alpha;+\infty[$ et que $g(0,6)<0$, g est négative sur $]\alpha;+\infty[$. On peut maintenant donner le tableau de signe de g.

Partie 3

1. Comme f' est strictement croissante sur I, pour tous x, y, si $x<y$, $f'(x)<f'(y)$. Ainsi

$$0,4\leq x\leq 0,7\Rightarrow f'(0,4)\leq f'(x)\leq f'(0,7)$$

D'après l'énoncé, on a alors $-0.7\leq f'(x)\leq -0.42$; ainsi $|f'(x)|\leq 0,7\leq 0,8$.

2. a) D'après la question II)3), f est strictement décroissante ; ainsi

$$0,4\leq x\leq 0,7\Rightarrow f(0,4)\geq f(x)\geq f(0,7)$$

D'après l'énoncé on a alors $0,6\geq f(x)\geq 0,41$, et donc $f(x)\in[0,4;0,7]$. On peut alors se servir de cette implication pour montrer par récurrence que $u_n\in[0,4;0,7]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$:

— Initialisation : c'est vrai pour u_0 car $u_0=0,7$.

— Hérédité : supposons la propriété vraie pour u_n. Alors $u_{n+1}=f(u_n)$ est l'image d'un élément de $[0,4;0,7]$ par f ; d'après ce qui précède, $u_{n+1}\in[0,4;0,7]$.

La propriété est démontrée par récurrence.

b) Si $u_n=\alpha$, comme $f(\alpha)=\alpha$ on a $u_{n+1}=\alpha$, et ainsi de suite pour tous les autres termes de la suite ; on a alors $|u_{n+1}-\alpha|=0=0,8\times 0=0,8|u_n-\alpha|$. Si $u_n\neq\alpha$, on peut diviser ; l'inégalité demandée est alors équivalente à

$$|\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}|\leq 0,8$$

Pour démontrer cette inégalité on va utiliser la formule des accroissements finis, en utilisant le fait que $f(\alpha)=\alpha$. Il faut cependant distinguer si x est pris à droite ou à gauche de α pour écrire les intervalles et le taux d'accroissement dans le bon sens [même si en pratique ça ne change rien ; la rédaction pourrait être plus directe ici mais je prends des précautions, et il faudrait dans tous les cas le signaler pour montrer qu'on a bien vu la subtilité] :

— Soit $x\in[0,4;\alpha[$. f est continue et dérivable sur $]x,\alpha[$ donc, d'après la formule des accroissements finis, il existe $c_x\in]x,\alpha[$ tel que $\frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}=f'(c_x)$. Ainsi

$$|\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}|=|f'(c_x)|\leq 0,8$$

— Soit $x\in]\alpha;0,7[$; f est continue et dérivable sur $]\alpha[$ donc, d'après la formule des accroissements finis, il existe $c_x\in]\alpha,x[$ tel que $\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}=f'(c_x)$. Ainsi

$$|\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}|=|f'(c_x)|\leq 0,8$$

Ainsi pour tout $x\in[0,4;0,7]$ on a $|f(x)-\alpha|\leq 0,8|x-\alpha|$. En prenant $x=u_n$, on obtient l'égalité demandée.

c) La question précédente permet d'établir que

$$|u_n - \alpha| \leq 0,8|u_{n-1} - \alpha| \leq 0,8^2|u_{n-2} - \alpha| \leq \ldots \leq 0,8^n|u_0 - \alpha|$$

La suite $(0,8^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison strictement inférieure à 1, et converge donc vers 0. Comme $|u_n - \alpha| \geq 0$, par le théorème des gendarmes on a $\lim_{n\in\mathbb{N}}|u_n - \alpha| = 0$; ainsi $\lim_{n\in\mathbb{N}} u_n = \alpha$.