DS 08 - 9 mai

Durée : 2h30. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On pose $f(x) = (x+1)e^{1/x}$.

1. a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, puis $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
   b) On prolonge f par continuité à gauche, c'est-à-dire on décide de poser $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$. Montrer alors que f est dérivable à gauche en 0 et déterminer $f'_g(0)$.
   c) Dessiner à main levée la courbe de f autour de 0.
2. a) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f'(x) \geq 0$?
   b) Déterminer $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ puis établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. *(On ne calculera pas la valeur de f en ses extrémas, mais on donnera néanmoins le signe.)*
   c) Déterminer le(s) point(s) d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe (Ox).
3. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en -1 de f. En déduire l'équation de la tangente à la courbe en ce point, ainsi que la position relative de la courbe et de la tangente. La fonction f admet-elle un extrémum en ce point ?
4. À l'aide d'un développement limité d'ordre 2 en 0 de e^x, montrer que C_f admet une asymptote Δ en $+\infty$, et une asymptote Δ' en $-\infty$. On précisera l'équation des asymptotes et la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ces asymptotes.
5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ en y faisant figurer tous les résultats de l'exercice.

Exercice 2

Soit g définie par $g(x) = (\cos x)^{1/x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g. *(Dans la suite de l'exercice on se concentrera sur $I =]-\frac{\pi}{2}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{2}[$.)*
2. Calculer la limite de g en $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{-\pi}{2}$.
3. a) Montrer que $\frac{1}{x}\ln(\cos(x)) = -\frac{x}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0.
   b) En déduire que $g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ au voisinage de 0.
   c) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. (Le prolongement de g sera toujours noté g.)
   d) Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

e) Préciser l'équation de la tangente T de $\mathcal{C}_g$ en 0, ainsi que la position relative des deux courbes.

4. a) Calculer un développement limité d'ordre 2 de $\frac{1}{x}$ en $\frac{-\pi}{3}$.

   b) En déduire un développement limité à l'ordre 2 de g en $\frac{-\pi}{3}$.

   c) Donner l'équation de la tangente à g en $\frac{-\pi}{3}$, ainsi que la position relative des courbes.

5. Tracer la courbe de g entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ en faisant apparaître tous les résultats de l'exercice.

Exercice 3

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$a = (1,0,1,0), \qquad b = (1,-2,-1,0), \qquad c = (0,1,2,-1), \qquad d = (2,-1,2,-1), \qquad e = (3,1,0,-1)$$

et les ensembles

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z - t = 0\}$$
$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y + 3z + 2t = 0\}$$

1. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Montrer que $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En déduire que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Quels vecteurs appartiennent à E ? À F ?
3. Trouver une base de E, et une base de F.
4. Montrer que (a,b,d,e) est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Exprimer c comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

Exercice 4

Dans cet exercice on étudie les deux sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$, les polynômes de degré ≤ 4 à coefficients réels.

$$F = \{\alpha X^4 + (\alpha + \beta)X + \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P'(1) = 0\}$$

1. Soit $Q \in F$; montrer que $Q = (X+1)S$ avec S un polynôme que l'on précisera.
2. Soit $A = X^4 + 4X + 3$; factoriser A dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Donner la dimension et la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
4. a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

   b) Déterminer une famille génératrice de F, puis une base de F ; en déduire $\dim F$.
5. a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et justifier que $\dim(G) \leq 4$.

   b) Montrer que la famille $(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une famille libre et que chaque polynôme de la famille appartient à G.

   c) En déduire que $G = \mathrm{Vect}(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$. Que vaut $\dim(G)$?
6. a) Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

   b) Déterminer une base de $F \cap G$.

Correction de l'exercice 1

1. a) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty \\
\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} &= +\infty \\
\lim_{x\to 0^+} (x+1)e^{1/x} &= +\infty \qquad \text{par croissances comparées}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{C}_f$ part vers l'infini en 0. On peut d'ores et déjà dire que f n'est pas prolongeable par continuité en 0. En 0^- on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty \\
\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} &= 0 \\
\lim_{x\to 0^-} (x+1)e^{1/x} &= 0
\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} e^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} + \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} e^{1/x}
\end{aligned}$$

La limite du premier terme est 0 ; la limite du deuxième est aussi 0 par croissances comparées, car si l'on pose $y = \frac{1}{|x|}$ l'expression devient $-ye^{-y}$, qui tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. Ainsi f est dérivable à gauche et $f'_g(0) = 0$.

c) Pour x au voisinage de 0 (à gauche) on a $x+1 > 0$, donc f est positive au voisinage de 0. À gauche de 0, la courbe de f doit donc décroître vers 0, avec une demi-tangente à gauche horizontale ; à droite de 0, elle tend vers $+\infty$ en se rapprochant de 0.

2. a) On a

$$\begin{aligned}
\left(e^{1/x}\right)' &= \frac{-1}{x^2} e^{1/x} \\
f'(x) &= e^{1/x} - \frac{x+1}{x^2} e^{1/x} \\
&= e^{1/x} \times \frac{x^2-x-1}{x^2}
\end{aligned}$$

On a $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \geq 0$. Le discriminant de ce polynôme est 5, et ses racines sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$; la dérivée est donc positive $]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$.

b) On a $\lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{1/x} = 1$. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

On peut tracer le tableau de variations : f est croissante, puis décroissante sur $]\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0[$ (de $\frac{3-\sqrt{5}}{2} e^{2/(1-\sqrt{5})} > 0$ à 0), puis il y a une discontinuité en 0 (pas une valeur interdite puisqu'on a prolongé f), puis décroissante sur $]0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ (de $+\infty$ à $\frac{3+\sqrt{5}}{2} e^{2/(1+\sqrt{5})}$), puis croissante (vers $+\infty$).

c) On peut parler des extrémas, du signe de la fonction sur certains intervalles, et du TVI, mais c'est plus simple de résoudre directement :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x+1)e^{1/x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x+1) = 0 \qquad \text{car exp ne s'annule pas} \\ &\Leftrightarrow x \in \{-1; 0\} \end{aligned}$$

Ainsi f s'annule en -1 et en 0.

3. On sait déjà que la fonction f n'admet pas d'extrémum en -1 car la dérivée de f ne s'y annule pas. En ce qui concerne le développement limité, on commence par poser $y = x + 1$, ce qui est au voisinage de 0 quand x est au voisinage de -1. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) = ye^{1/(y-1)} &= ye^{-1/(1-y)} \\ &= ye^{-1-y-y^2+o(y^2)} \end{aligned}$$

On veut ensuite faire un développement limité de l'exponentielle, mais il faut pour cela que ce qu'il y a dans l'exponentielle tende vers 0 ; on écrit alors

$$\begin{aligned} -f(x) &= y \times e^{-1} \times e^{-y-y^2+o(y^2)} \\ &= \frac{y}{e} \times \left(1 + (-y - y^2 + o(y^2)) + \frac{(-y - y^2 + o(y^2))^2}{2} + o(y^2)\right) \\ &= \frac{y}{e} \times \left(1 - y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) \\ &= \frac{y - y^2 - y^3/2}{e} + o(y^3) \end{aligned}$$

On s'aperçoit qu'on aurait pu se contenter d'un DL à l'ordre 1 ; ça n'est pas grave, puisqu'on peut tronquer les DL (on a juste fait des calculs en trop) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e}y - \frac{1}{e}y^2 + o(y^2) \\ &= \frac{1}{e}(x+1) - \frac{1}{e}(x+1)^2 + o((x+1)^2) \end{aligned}$$

L'équation de la tangente en -1 à la courbe est donc $\frac{x+1}{e}$, et la courbe est en-dessous de la tangente car $-\frac{(x+1)^2}{e} < 0$.

4. On commence par le développement asymptotique en $+\infty$; posons $y = \frac{1}{x}$, alors y est au voisinage de 0^+ quand x est au voisinage de $+\infty$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{1}{y}\right) e^y \\ &= \left(1 + \frac{1}{y}\right) (1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)) \\ &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) + \frac{1}{y} + 1 + \frac{y}{2} + o(y) \\ &= \frac{1}{y} + 2 + \frac{3}{2}y + o(y) \\ &= x + 2 + \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

On trouve alors une asymptote $\Delta : y = x+2$, et comme $\frac{3}{2x} > 0$ au voisinage de $+\infty$ la courbe est au-dessus de l'asymptote. En ce qui concerne le développement asymptotique en $-\infty$, on pose aussi $y = \frac{1}{x}$, et le calcul est identique ; on trouve aussi que Δ est asymptote en $-\infty$, mais cette fois la courbe est en-dessous de l'asymptote.

5. On a le tableau de variations, le comportement en $+\infty$, $-\infty$ et en -1, ainsi qu'en 0 ; il ne reste plus qu'à tracer.

Correction de l'exercice 2

1. La fonction g est une fonction avec une puissance réelle ; ainsi on a (par définition d'une puissance non-entière) $g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(\cos(x))}$. On a

$$\begin{aligned} x \in D_g &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } \cos(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[\text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{et } x \neq 0 \end{aligned}$$

2. La fonction n'est pas définie à droite de $\frac{\pi}{2}$, car cos est négative à droite de $\frac{\pi}{2}$. Ainsi on regarde simplement la limite à gauche en ce point. On a

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{x} = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{donc} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2}{\pi}x} = 0$$

Ainsi g tend vers 0 en $\frac{\pi}{2}$. Pour ce qui est de la limite en $\frac{-\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} \cos(x) &= 0 \\ \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} \ln(\cos(x)) &= -\infty \\ \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} \frac{1}{x} &= \frac{-\pi}{2} \\ \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} \frac{\ln(\cos(x))}{x} &= +\infty \\ \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} g(x) &= +\infty \end{aligned}$$

3. a) On souhaite obtenir un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0. On écrit

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \ln(\cos(x)) &= \ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= \ln(1+X) \text{ avec } X = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

X est au voisinage de 0 lorsque x est au voisinage de 0, donc on peut utiliser le développement limité de $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x)) &= X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)\\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) + o(x^2)\end{aligned}$$

car $X^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4) = o(x^2)$. On obtient ainsi

$$\frac{1}{x}\ln(\cos(x)) = -\frac{x}{2} + o(x)$$

On obtient un développement limité d'ordre 2... Il aurait donc fallu démarrer avec des DL d'ordre 3 pour compenser ; mais il n'y a pas de terme en x^3 dans $\cos(x)$, et $\frac{x^4}{4} = o(x^3)$, donc on obtient strictement le même calcul, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \qquad \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)\\ &\frac{1}{x}\ln(\cos(x)) = \frac{-x}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

Le résultat est bien démontré.

b) On a

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(\cos(x))} = e^{\frac{-x}{2}+o(x^2)} = e^X$$

avec $X = \frac{-x}{2} + o(x^2)$, qui est au voisinage de 0 quand x est au voisinage de 0 ; on utilise alors le développement limité de exp en 0 :

$$\begin{aligned}g(x) &= 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\\ &= 1 - \frac{x}{2} + o(x^2) + \frac{x^2/4}{2} + o(x^2) + o(x^2)\\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\end{aligned}$$

c) D'après le développement limité précédent, on a $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Cette limite est finie, on peut donc prolonger g en posant $g(0) = 1$.

d) Au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) - 1}{x}\\ &= \frac{-1}{2} + \frac{x}{8} + o(x)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2} + \frac{x}{8} + o(x) = \frac{-1}{2}$$

La fonction est donc dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{-1}{2}$. (Attention pour cette question à ne pas utiliser l'unicité des coefficients d'un DL et la formule de Taylor-Young : on n'a pas encore montré que la fonction est dérivable en 0.)

e) L'équation de la tangente en 0 est $T : y = \frac{-1}{2}(x-0)+1 = 1-\frac{x}{2}$. On a

$$g(x) - (1-\frac{x}{2}) = \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

Comme $\frac{x^2}{8} > 0$ au voisinage de 0, la courbe est toujours au-dessus de la tangente.

4. a) On est au voisinage de $\frac{-\pi}{3}$; ainsi on va poser $y = x + \frac{\pi}{3}$, et y est au voisinage de 0 quand x est au voisinage de $\frac{-\pi}{3}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{y-\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{-\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3y}{\pi}\right)}\end{aligned}$$

Lorsque y est au voisinage de 0, $\frac{3y}{\pi}$ l'est aussi ; ainsi on peut utiliser le DL de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{-3}{\pi} \times \frac{1}{1-\frac{3y}{\pi}} \\ &= \frac{-3}{\pi}\left(1+\frac{3y}{\pi}+\frac{9y^2}{\pi^2}+o(y^2)\right) \\ &= -\frac{3}{\pi} - \frac{9}{\pi^2}y - \frac{27}{\pi^3}y^2 + o(y^2) \\ &= -\frac{3}{\pi} - \frac{9}{\pi^2}(x+\frac{\pi}{3}) - \frac{27}{\pi^3}(x+\frac{\pi}{3})^2 + o((x+\frac{\pi}{3})^2)\end{aligned}$$

b) On écrit

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(y+\frac{\pi}{3}) \\ &= \cos(y)\times\frac{1}{2} - \sin(y)\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{y^2}{4} + o(y^2) \\ \ln(\cos(x)) &= \ln(\frac{1}{2}) + \ln(1-\sqrt{3}y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)) \\ &= \ln(\frac{1}{2}) + \ln(1+Y)\end{aligned}$$

avec $Y = -\sqrt{3}y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ (et donc $Y^2 = 3y^2 + o(y^2)$). D'après ce qui précède

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x)) &= -\ln(2) - \sqrt{3}y - \frac{5}{2}y^2 + o(y^2) \\ \frac{1}{x}\ln(\cos(x)) &= \left(\frac{3}{\pi}+\frac{9}{\pi^2}y+\frac{27}{\pi^3}y^2+o(y^2)\right)\left(\ln(2)+\sqrt{3}y+\frac{5}{2}y^2+o(y^2)\right) \\ &= \frac{3\ln(2)}{\pi} + \frac{3\sqrt{3}\pi+9\ln(2)}{\pi^2}y + \frac{27\ln(2)+9\pi\sqrt{3}+15\pi^2/2}{\pi^3}y^2 + o(y^2)\end{aligned}$$

Il faut maintenant prendre l'exponentielle de tout ceci ; vu les coefficients il vaut mieux poser $\alpha = \frac{3\sqrt{3}\pi+9\ln(2)}{\pi^2}$ et $\beta = \frac{27\ln(2)+9\pi\sqrt{3}+15\pi^2/2}{\pi^3}$. On a alors

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{\frac{3}{\pi}\ln(2)+\alpha y+\beta y^2+o(y^2)} \\ &= 2^{3/\pi} \times \left(1 + (\alpha y + \beta y^2 + o(y^2)) + \frac{(\alpha y + \beta y^2 + o(y^2))^2}{2} + o(y^2)\right) \\ &= 2^{3/\pi}\left(1 + \alpha y + \frac{2\beta + \alpha^2}{2} y^2 + o(y^2)\right) \end{aligned}$$

c) L'équation de la tangente en $\frac{-\pi}{3}$ est $y = \alpha 2^{3/\pi}(x - \frac{-\pi}{3}) + 2^{3/\pi}$; la position relative est donnée par le signe de $2\beta+\alpha^2$, qui est positif (car α et β sont positifs vu leur expression). Ainsi la courbe est au-dessus de la tangente.

5. On a les limites de la fonction aux bornes de l'intervalle, le comportement local en 0, et celui en $-\frac{\pi}{3}$. Pour aider au tracé de la figure, on prend $\pi \simeq 3.14$, donc $\frac{\pi}{2} \simeq 1.57$ et $\frac{\pi}{3} \simeq 1.03$; ainsi on peut aussi dire que $2^{3/\pi} \simeq 2^1 = 2$, ce qui peut aider pour la hauteur de la courbe au point $\frac{-\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 3

1. Les éléments de A sont des éléments de $\mathbb{R}^4$ donc $A \subset \mathbb{R}^4$. Soit $(x, y, z, t) \in A$ et $(x', y', z', t') \in A$; leur somme est $(x + x', y + y', z + z', t + t')$, montrons qu'elle est dans A. On a

$$\begin{aligned} \alpha(x + x') + \beta(y + y') + \gamma(z + z') + \delta(t + t') &= \alpha x + \alpha x' + \beta y + \beta y' + \gamma z + \gamma z' + \delta t + \delta t' \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc la somme est bien dans A. Concernant le produit, on a

$$\alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) + \gamma(\lambda z) + \delta(\lambda t) = \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t) = \lambda \times 0 = 0$$

Ainsi A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. E et F étant de cette forme, ce sont donc des espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

2. On a $a \in E$, $b \in E \cap F$, $c \in E$, $d \in E$, $e \in F$.

3. Certains ont essayé de montrer que (a, b, c, d) est libre ; cependant, on nous demande dans la dernière question d'exprimer c en fonction des autres, donc ça ne doit pas être libre... En plus si la famille était libre ça voudrait dire que $\dim E = 4$ et donc $E = \mathbb{R}^4$, ce qui n'est pas vrai. Faisons donc la méthode habituelle : si $(x, y, z, t) \in E$, alors $t = x + y - z$ et donc le quadruplet s'écrit $(x, y, z, x + y - z)$. On transforme ce quadruplet :

$$(x, y, z, x + y - z) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, -1)$$

Ainsi la famille $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1))$ est génératrice de E. Elle est également libre car

$$\alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, -1) = (\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta - \gamma)$$

Ce quadruplet est égal à 0 si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ainsi c'est une base de E. On procède de même pour F :

$$\begin{aligned} A = (x, y, z, t) \in F &\Leftrightarrow y = x - 3z + 2t \\ &\Leftrightarrow A = (x, x - 3z + 2t, z, t) \\ &\Leftrightarrow A = x(1, 1, 0, 0) + z(0, -3, 1, 0) + t(0, 2, 0, 1) \end{aligned}$$

Ainsi $((1,1,0,0),(0,-3,1,0),(0,2,0,1))$ est génératrice ; elle est libre car

$$\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,-3,1,0),+\gamma(0,2,0,1)=(\alpha,\alpha-3\beta+2\gamma,\beta,\gamma)$$

Ce quadruplet est nul si et seulement si $\alpha=\beta=\gamma=0$. Ainsi c'est une base de F.

4. Puisque $\dim\mathbb{R}^4=4$ et que l'on a une famille de 4 vecteurs, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. On a

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma+3\delta=0\\ -2\beta-\gamma+\delta=0\\ \alpha-\beta+2\gamma=0\\ -\gamma-\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma+3\delta=0\\ -2\beta-\gamma+\delta=0\\ -2\beta\qquad-3\delta=0\\ -\gamma-\delta=0\end{cases}\qquad L_3\leftarrow L3-L_1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma+3\delta=0\\ -2\beta-\gamma+\delta=0\\ \gamma-4\delta=0\\ -\gamma-\delta=0\end{cases}\qquad L_3\leftarrow L3-L_2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma+3\delta=0\\ -2\beta-\gamma+\delta=0\\ \gamma-4\delta=0\\ -5\delta=0\end{cases}\qquad L_4\leftarrow L_4+L_3$$

C'est un système triangulaire supérieur avec uniquement des termes non nuls sur la diagonale, donc c'est un système de Cramer, et il a donc une unique solution : c'est nécessairement la solution nulle car le système est homogène (et cette solution marche toujours pour les systèmes homogènes). Donc $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

5. Il faut résoudre $c = \alpha a + \beta b + \delta d + \gamma e$. On a

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = (0,1,2,-1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta &=& 0 \\ -2\beta - \gamma + \delta &=& 1 \\ \alpha - \beta + 2\gamma \quad\quad &=& 2 \\ -\gamma - \delta &=& -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta &=& 0 \\ -2\beta - \gamma + \delta &=& 1 \\ -2\beta \quad\quad - 3\delta &=& 2 \\ -\gamma - \delta &=& -1 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta &=& 0 \\ -2\beta - \gamma + \delta &=& 1 \\ \gamma - 4\delta &=& 1 \\ -\gamma - \delta &=& -1 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta &= 0 \\ -2\beta - \gamma + \delta &= 1 \\ \gamma - 4\delta &= 1 \\ -5\delta &= 0 \end{array}\right. \qquad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \alpha &=& -1 \\ \beta &=& -1 \\ \gamma &=& 1 \\ \delta &=& 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $c = d - a - b$ (ce que l'on peut revérifier au brouillon). Les coordonnées de c dans la base (a, b, d, e) sont donc $(-1, -1, 1, 0)$.

Correction de l'exercice 4

1. Soit $Q \in F$. On a

$$\begin{aligned} Q(-1) &= \alpha(-1)^4 + (\alpha + \beta) \times (-1) + \beta \\ &= \alpha + \beta - (\alpha + \beta) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi -1 est racine de Q, et donc il existe S tel que $Q = (X - (-1))S = (X + 1)S$. Pour préciser S, on peut commencer par dire que son degré est nécessairement égal à 3, mis à part pour le cas $\alpha = 0$. Précisons ceci avec une disjonction de cas :

— Si $\alpha = 0$, si $\beta = 0$ alors $S = 0$ convient ;

— Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, on a $Q = \beta(X + 1)$ et donc $S = \beta$ (polynôme constant) convient.

— Si $\alpha \neq 0$: le degré de S est 3, et donc $S = s_0 + s_1 X + s_2 X^2 + s_3 X^3$. Par identification des coefficients dominants, $s_3 = \alpha$; par identification des coefficients constants, $s_0 = \beta$. Ainsi

$$\begin{aligned} Q &= (X + 1)(\alpha X^3 + s_2 X^2 + s_1 X + \beta) \\ &= \alpha X^4 + (\alpha + s_2)X^3 + (s_1 + s_2)X^2 + (\beta + s_1)X + \beta \end{aligned}$$

Par identification, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta + s_1 &=& \beta + \alpha \\ s_1 + s_2 &=& 0 \\ \alpha + s_2 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} s_1 &=& \alpha \\ s_2 &=& -\alpha \end{array}\right.$$

Ainsi $Q = (X+1)(\alpha X^3 - \alpha X^2 + \alpha X + \beta)$.

2. On commence par chercher des racines évidentes : la seule qui fonctionne est -1. On a

$$\begin{aligned} A(-1) &= (-1)^4 + 4 \times (-1) + 3 = 0 \\ A'(-1) &= 4 \times (-1)^3 + 4 = 0 \\ A''(-1) &= 12 \times (-1)^2 = 12 \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi -1 est une racine double. On a donc

$$A = (X+1)^2 Q, \qquad \deg Q = 2$$

Posons $Q = aX^2 + bX + c$; par identification des coefficients dominants on a $a = 1$, et par identification des coefficients constants on a $c = 3$. Ainsi

$$A = (X^2 + 2X + 1)(X^2 + bX + 3) = X^4 + (2+b)X^3 + (4+2b)X^2 + (6+b)X + 3$$

On trouve $b = -2$, et donc $Q = (X+1)^2(X^2 - 2X + 3)$. Le discriminant est -8, et donc c'est la fin de la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ car ce trinôme est irréductible. Les racines sur $\mathbb{C}$ sont $1 + i\sqrt{2}$ et $1 - i\sqrt{2}$. Ainsi la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$ est :

$$A = (X-1)^2 \left(X - 1 - i\sqrt{2}\right) \left(X - 1 + i\sqrt{2}\right)$$

3. $\mathbb{R}_4[X]$ est de dimension 5, et sa base canonique est $(1, X, X^2, X^3, X^4)$.

4. a) Tout d'abord, $F \subset \mathbb{R}_4[X]$ car tous les polynômes dans F sont de degré au plus 4. Ensuite, si $Q_1 = \alpha_1 X^4 + (\alpha_1 + \beta_1)X + \beta_1$ et $Q_2 = \alpha_2 X^4 + (\alpha_2 + \beta_2)X + \beta_2$, on a

$$Q_1 + Q_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)X^4 + (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2)X + (\beta_1 + \beta_2)$$

Ce polynôme est de la bonne forme (prendre $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + \beta_2$) donc $Q_1 + Q_2 \in F$. De plus, $\lambda Q_1 \in F$ (prendre $\alpha = \lambda\alpha_1$ et $\beta = \lambda\beta_1$). Ceci montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) Il y a plusieurs méthodes : on peut par exemple prendre un polynôme, voir si le Vect associé décrit tout F, si non il y a un contre-exemple, on l'ajoute à la famille, on continue, etc. Ici une réécriture suffit pour conclure : si $Q \in F$ on a

$$Q = \alpha X^4 + \alpha X + \beta X + \beta = \alpha(X^4 + X) + \beta(X + 1)$$

Ainsi, $(X + 1, X^4 + X)$ est une famille génératrice de F puisque tout polynôme de F est combinaison linéaire de ces deux polynômes. Cette famille est de plus libre :

$$\begin{aligned} \alpha(X^4 + X) + \beta(X + 1) = 0 &\Leftrightarrow \alpha X^4 + (\alpha + \beta)X + \beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \alpha &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \beta &= 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Puisqu'elle est génératrice de F et qu'elle est libre, c'est une base de F, et donc $\dim F = 2$.

5. a) Les éléments de G sont des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ donc $G \subset \mathbb{R}_4[X]$. Prenons deux polynômes P_1 et P_2 dans G ; alors

$$\begin{aligned}(P_1+P_2)'(1) = P_1'(1)+P_2'(1) = 0+0 = 0\\ (\lambda P_1)'(1) = \lambda P_1'(1) = \lambda \times 0 = 0\end{aligned}$$

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. Puisque la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$ est 5, $\dim G \leq 5$; montrons qu'elle est en fait ≤ 4. On peut par exemple procéder par l'absurde : si $\dim G = 5$, on a $G \subset \mathbb{R}_4[X]$ et leurs dimensions sont égales ; par un théorème du cours on sait qu'on a alors $G = \mathbb{R}_4[X]$. Ceci veut dire que tous les polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ vérifient $P'(1) = 0$; or ça n'est pas toujours vrai (par exemple prendre le polynôme X) donc c'est absurde. Ainsi $\dim G \leq 4$.

b) Commençons par montrer que chacun de ces polynômes appartient à G :

$$(1)' = 0, \qquad \left((X-1)^2\right)' = 2(X-1), \qquad \left((X-1)^3\right)' = 3(X-1)^2, \qquad \left((X-1)^4\right)' = 4(X-1)^3$$

Tous ces polynômes valent 0 en 1 ; ainsi la famille est une famille de polynômes appartenant à G. Pour ce qui est de la liberté, on peut rédiger de deux façons :

— Par le binôme de Newton on a

$$\begin{aligned}&\alpha \times 1 + \beta(X-1)^2 + \gamma(X-1)^3 + \delta(X-1)^4\\ =&(\alpha+\beta-\gamma+\delta) + (-2\beta+3\gamma-4\delta)X + (\beta-3\gamma+6\delta)X^2\\ &+(\gamma-4\delta)X^3 + \delta X^4\end{aligned}$$

Par identification on trouve un système homogène triangulaire supérieur avec une diagonale non nulle :

$$\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma+\delta &= 0\\ -2\beta+3\gamma-4\delta &= 0\\ \beta-3\gamma+6\delta &= 0\\ \gamma-4\delta &= 0\\ \delta &= 0\end{cases}$$

Ce système est inversible vu que la diagonale est non nulle ; ainsi il n'y a qu'une seule solution, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et la famille est libre.

— Deuxième façon : Supposons que

$$\alpha \times 1 + \beta(X-1)^2 + \gamma(X-1)^3 + \delta(X-1)^4 = 0$$

Le seul terme en X^4 est δX^4 ; par identification on trouve $\delta = 0$, et donc

$$\alpha \times 1 + \beta(X-1)^2 + \gamma(X-1)^3 = 0$$

Maintenant, le seul terme en X^3 est γX^3 ; par identification, on trouve $\gamma = 0$. On a ensuite $\alpha \times 1 + \beta(X-1)^2 = 0$; par identification du terme en X^2 on a $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$: la famille est libre.

c) La famille précédente est une famille libre ; ainsi, le rang de cette famille est égal à son cardinal, c'est-à-dire 4. Donc

$$\dim \mathrm{Vect}(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4) = 4$$

Or ces 4 vecteurs sont dans G, qui est un espace vectoriel ; ainsi toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs sont encore dans G, et donc $\mathrm{Vect}(1,(X-1)^2,(X-1)^3,(X-1)^4) \subset G$. Ceci montre que $4 \leq \dim G$; couplé au résultat de 5)a) on trouve $\dim G = 4$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{Vect}(1,(X-1)^2,(X-1)^3,(X-1)^4) = 4 \\
&\dim G = 4 \\
&\mathrm{Vect}(1,(X-1)^2,(X-1)^3,(X-1)^4) \subset G
\end{aligned}$$

D'après un théorème du cours ces deux espaces sont en fait égaux, et $\mathrm{Vect}(1,(X-1)^2,(X-1)^3,(X-1)^4) = G$.

6. a) Tout d'abord, F et G sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}_4[X]$, donc $F \cap G \subset \mathbb{R}_4[X]$. Soient P_1 et P_2 des éléments de $F \cap G$ (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à la fois à F et à G). Alors :

   — $P_1 + P_2$ appartient à F, car $P_1 \in F$ et $P_2 \in F$ et que F est un espace vectoriel ;

   — $P_1 + P_2$ appartient à G car $P_1 \in G, P_2 \in G$ et G est un espace vectoriel.

   Donc $P_1 + P_2 \in F \cap G$. Ensuite, on a $\lambda P_1 \in F$ car $P_1 \in F$ et F est un espace vectoriel ; et $\lambda P_1 \in G$ car $P_1 \in G$ et G est un espace vectoriel. Au final, $\lambda P_1 \in F \cap G$, ce qui finit la preuve que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

   b) Essayons d'en apprendre plus sur $F \cap G$:

$$\begin{aligned}
P \in F \cap G &\Leftrightarrow P = \alpha X^4 + (\alpha+\beta)X + \beta, \qquad P'(1) = 0 \\
&\Leftrightarrow P = \alpha X^4 + (\alpha+\beta)X + \beta, \qquad 4\alpha + \alpha + \beta = 0 \\
&\Leftrightarrow P = \alpha X^4 + -4\alpha X - 5\alpha \\
&\Leftrightarrow P = \alpha(X^4 - 4X - 5)
\end{aligned}$$

   Ainsi $F \cap G = \mathrm{Vect}(X^4 - 4X - 5)$ et $\dim F \cap G = 1$.