DS 09 - 6 juin

Durée : 3h. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

(adapté de Cachan-ENSAI D2 2016)

Soient les deux applications suivantes :

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto (2z_1 - z_3, 3z_1 + z_2 + 2z_3) \qquad\qquad (z_1, z_2) \to (z_1 + z_2, -z_2, 2z_1 - z_2)$$

1. Montrer que l'application u est une application linéaire. *(On admettra que v est linéaire.)*
2. Calculer $\operatorname{Ker} u$. u est-elle injective ?
3. Calculer $\operatorname{Im} u$. u est-elle surjective ?
4. Déterminer H, la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
5. Déterminer K, la matrice de v dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
6. Calculer HK, puis montrer que $(HK)^2 = \lambda I_2$, où I_2 est la matrice identité de taille 2×2 et λ un scalaire que l'on déterminera.
7. En déduire sans (long) calcul que HK est inversible.
8. Montrer que $u \circ v$ est inversible et donner l'expression de $(u \circ v)^{-1}(x, y)$.

Exercice 2

(tiré de Agro 2018.)

Soit la fonction $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle

$$s'(t) = -\frac{v_{max} \times s(t)}{K_M + s(t)}$$

avec v_{max} et K_M des constantes (ayant une interprétation chimique) que l'on suppose données. On donne aussi la condition initiale $s(\delta) = s_0$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = xe^x$.
   a) Démontrer que g est strictement croissante.
   b) En déduire que la fonction h, réciproque de g, est bien définie et donner son domaine de définition.
   c) Tracer la courbe de g, puis la courbe de h en expliquant la méthode utilisée. *(On donne $e \simeq 2,7$.)*
   d) Proposer une méthode numérique permettant de calculer une valeur approchée de $h(\alpha)$ avec α donné.
2. On pose $y(t) = g\left(\frac{s(t)}{K_M}\right)$. Écrire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction y, et donner la condition initiale correspondante.
3. Déduire des questions précédentes une expression de $y(t)$, puis de $s(t)$, en fonction de t, K_M, v_{max} et s_0 (et faisant appel à la fonction h).

Exercice 3

On considère les intégrales I et J définies par

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx, \qquad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

1. En effectuant le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, démontrer que $I = J$.
2. Calculer $I + J$ et en déduire la valeur commune de I et J.

Problème

(adapté de G2E 2010)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ donné, et $I =]-1; 1[$.

1. Déterminer les réels a, b dépendant de λ tels que, $\forall x \in I$,

$$\frac{3x + 1 - \lambda}{1 - x^2} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 + x}$$

On considère l'équation différentielle $(E_\lambda) : (1 - x^2)y'(x) + (3x + 1 - \lambda)y(x) = 0$.

2. Résoudre cette équation sur I pour tout réel λ.
3. On admettra que la fonction $x \mapsto (1 + x)^\alpha(1 - x)^\beta$ est un polynôme si et seulement si α et β sont des entiers naturels. Montrer que les seules valeurs de λ pour lesquelles les solutions de (E_λ) sont des polyômes sont $-2, 0, 2$ et 4. Préciser alors les solutions correspondantes.
4. Résoudre sur I l'équation $(E) : (1 - x^2)y'(x) + (3x - 1)y(x) = (1 + x)^3$.

Soient $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, et $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique $\mathbb{R}_3[X]$. On note R et S les polynômes définis sur $\mathbb{R}$ par $R(X) = 1 - X^2$ et $S(X) = 1 + 3X$. Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on désigne par P' son polynôme dérivé.

5. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on a $RP' + SP \in \mathbb{R}_3[X]$.
6. Montrer que l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe $f(P) = RP' + SP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
7. Calculer $f(P)$ pour $P \in \{1, X, X^2, X^3\}$. En déduire que $\mathrm{Mat}_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
8. On note g_λ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $g_\lambda(P) = f(P) - \lambda P$. En utilisant la question 3, déterminer les valeurs de λ pour lesquelles g_λ n'est pas injectif ; pour chacun de ces λ, donner un polynôme de coefficient dominant égal à 1 appartenant à $\mathrm{Ker}(g_\lambda)$.
9. Déterminer une base B' de $\mathbb{R}_3[X]$ formée de vecteurs appartenant à $\mathrm{Ker}(g_\lambda)$, chacun pour un λ différent.
10. Que vaut $\mathrm{Mat}_{B',B'}(f)$?

Corrigé de l'exercice 1

1. On vérifie la stabilité par addition et multiplication par un réel :
   — Soient (z_1, z_2, z_3) et (t_1, t_2, t_3) dans $\mathbb{R}^3$. Leur somme est $(z_1 + t_1, z_2 + t_2, z_3 + t_3) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u(z_1+t_1, z_2+t_2, z_3+t_3) &= (2(z_1+t_1) - (z_3+t_3), 3(z_1+t_1) + (z_2+t_2) + 2(z_3+t_3)) \\ u(z_1,z_2,z_3) + u(t_1,t_2,t_3) &= (2z_1 - z_3, 3z_1 + z_2 + 2z_3) + (2t_1 - t_3, 3t_1 + t_2 + 2t_3) \\ &= (2z_1 - z_3 + 2t_1 - t_3, 3z_1 + z_2 + 2z_3 + 3t_1 + t_2 + 2t_3) \\ &= u(z_1+t_1, z_2+t_2, z_3+t_3) \end{aligned}$$

   — Soient $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3) &= (2\lambda z_1 - \lambda z_3, 3\lambda z_1 + \lambda z_2 + 2\lambda z_3) \\ &= \lambda u(z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

   Ainsi u est une application linéaire.

2. Calculons le noyau de u :

$$\begin{aligned} (z_1,z_2,z_3) \in \operatorname{Ker} u &\Leftrightarrow u(z_1,z_2,z_3) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 - z_3 = 0 \\ 3z_1 + z_2 + 2z_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 - z_3 = 0 \\ 7z_1 + z_2 = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_3 = 2z_1 \\ z_2 = -7z_1 \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} u &= \{(z_1, -7z_1, 2z_1), z_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}((1,-7,2)) \end{aligned}$$

   Comme $\operatorname{Ker} u \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, u n'est pas injective.

3. Calculons $\operatorname{Im} u$:

$$\begin{aligned} (a,b) \in \operatorname{Im}(u) &\Leftrightarrow \exists (z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } u(z_1,z_2,z_3) = (a,b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 - z_3 = a \\ 3z_1 + z_2 + 2z_3 = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 - z_3 = a \\ 7z_1 + z_2 = a + 2b \end{cases} \end{aligned}$$

   Pour n'importe quelle valeur de, par exemple, z_1, on peut trouver z_2 et z_3 tel que le système a une solution. Ainsi ce système a toujours une solution, quels que soient les a et b ; $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$, et u est surjective.

4. On commence par calculer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$u(1,0,0) = (2,3), \qquad u(0,1,0) = (0,1), \qquad u(0,0,1) = (-1,2)$$

   Ainsi par définition de la matrice d'une application linéaire (et en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. On fait de même que la question précédente :

$$v(1,0) = (1,0,2), \qquad v(0,1) = (1,-1,-1)$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

6. On a

$$HK = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis on calcule

$$(HK)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = 21 I_2$$

7. On a $HK \times \left(\frac{1}{21} HK\right) = I_2$, et cette formule marche également dans l'autre sens ; ainsi HK est inversible et

$$(HK)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

8. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(v) = HK$$

De plus, d'après le cours, $u \circ v$ est bijectif si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(u \circ v)$ est inversible, donc si et seulement si HK l'est, et son inverse est l'inverse de HK. Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}\left((u \circ v)^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer l'expression de $(u \circ v)^{-1}(x,y)$, on calcule

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{7}y, \frac{1}{3}x\right)$$

ainsi $(u \circ v)^{-1}(x,y) = (\frac{1}{7}y, \frac{1}{3}x)$.

Corrigé de l'exercice 2

1. a) La fonction g est dérivable en tant que produit, et on a

$$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x > 0$$

car $x \geq 0$. Ainsi g est strictement croissante.

   b) Comme g est continue, d'après le théorème de la bijection monotone elle est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[a,b]$, avec $a = \lim_{x\to 0} g(x)$ et $b = \lim_{x\to+\infty} g(x)$, donc de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Sa réciproque h est donc une fonction continue bijective strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

c) On commence par tracer une fonction strictement croissante tendant rapidement vers $+\infty$ et passant par les points $(0;0),(1;2,7),(2;2\times(2,7)^2)$ (donc $(2;7.29)$). Si on veut faire le malin et qu'on connaît $\ln 2 \simeq 0,69$, on peut faire le point $(0,69;1,38)$ aussi. Ensuite, on trace la droite $y=x$ et on fait la courbe symétrique par rapport à cet axe pour trouver la courbe de h.

d) Pour α donné, par définition $h(\alpha)$ est l'unique point vérifiant $g(h(\alpha))=\alpha$, c'est-à-dire l'unique solution de $g(x)=\alpha$. On prend la fonction $G : x \to g(x)-\alpha$: le problème est maintenant de trouver un zéro de la fonction, ce que l'on fait par dichotomie ou avec la méthode de Newton.

2. La fonction y est dérivable en tant que composée. On a

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(\frac{s(t)}{K_M}\right)' \times g'\left(\frac{s(t)}{K_M}\right) \\ &= \frac{s'(t)}{K_M}\frac{s(t)+K_M}{K_M}e^{s(t)/K_M} \\ &= \frac{1}{K_M}\frac{-v_{max}s(t)}{s(t)+K_M}\frac{s(t)+K_M}{K_M}e^{s(t)/K_M} \\ &= -\frac{v_{max}}{K_M}\frac{s(t)}{K_M}e^{s(t)/K_M} \\ &= -\frac{v_{max}}{K_M}y(t) \end{aligned}$$

Ainsi y est solution de $y' + \frac{v_{max}}{K_M}y = 0$. La condition initiale correspondante est $y(\delta) = g(s_0/K_M) = \frac{s_0}{K_M}e^{s_0/K_M}$.

3. Si on pose (H) l'équation différentielle $y' + \frac{v_{max}}{K_M}y = 0$, on a

$$S_H = \{t \mapsto \lambda e^{-\frac{v_{max}}{K_M}t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

On peut utiliser la condition initiale pour trouver la valeur de λ :

$$\lambda e^{-\frac{v_{max}}{K_M}\delta} = g(s_0/K_M) \Rightarrow \lambda = \frac{s_0}{K_M}e^{s_0/K_M + \frac{v_{max}}{K_M}\delta}$$

D'où

$$\begin{aligned} y(t) &= g\left(\frac{s_0}{K_M}\right)e^{\frac{v_{max}}{K_M}(\delta - t)} \\ \Leftrightarrow g\left(\frac{s(t)}{K_M}\right) &= g\left(\frac{s_0}{K_M}\right)e^{\frac{v_{max}}{K_M}(\delta - t)} \\ \Leftrightarrow s(t) &= K_M h\left(g\left(\frac{s_0}{K_M}\right)e^{\frac{v_{max}}{K_M}(\delta - t)}\right) \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ est un changement de variable $\mathcal{C}^1$, et on a $\frac{dt}{dx} = -1$, d'où $dt = -dx$. Les bornes sont inversées et deviennent respectivement $\frac{\pi}{2}$ et 0. Ainsi

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin(\pi/2 - t)}{\sin(\pi/2-t)+\cos(\pi/2-t)} - dt$$

Or $\sin(\pi/2 - t) = \cos(t)$ et $\cos(\pi/2 - t) = \sin(t)$ (en utilisant les formules d'addition, par exemple). Ainsi

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt \\ &= \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \end{aligned}$$

car le signe de l'intégrale change lorsqu'on inverse les bornes. Ainsi $I = J$.

2. On a par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_{0}^{\pi/2} 1 dx = \pi/2 \end{aligned}$$

Ainsi $I + J = \frac{\pi}{2}$ et $I = J$; au final $I = J = \frac{\pi}{4}$.

Corrigé du problème

1. On commence par mettre au même dénominateur, puis on identifie :

$$\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{a + ax + b - bx}{1 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1;1[,\ \frac{3x + 1 - \lambda}{1 - x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} &\Leftrightarrow \forall x \in]-1;1[,\ 3x + 1 - \lambda \ = (a-b)x + a + b \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = \quad 3 \\ a + b = 1 - \lambda \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \ \ 2 - \frac{\lambda}{2} \\ b = -1 - \frac{\lambda}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{3x + 1 - \lambda}{1 - x^2} = \frac{2 - \frac{\lambda}{2}}{1 - x} - \frac{1 + \frac{\lambda}{2}}{1 + x}$$

2. On peut commencer par diviser par $1 - x^2$ pour se ramener à la forme du cours ; on peut toujours le faire car $x \in I$. On a

$$\begin{aligned} (E_\lambda) &\Leftrightarrow y'(x) + \frac{3x + 1 - \lambda}{1 - x^2} y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow y'(x) + \left(\frac{2 - \frac{\lambda}{2}}{1 - x} - \frac{1 + \frac{\lambda}{2}}{1 + x} \right) y(x) = 0 \end{aligned}$$

Pour trouver les solutions de l'équation homogène, on calcule la primitive

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2 - \frac{\lambda}{2}}{1 - x} - \frac{1 + \frac{\lambda}{2}}{1 + x} \right) dx &= \int \frac{2 - \frac{\lambda}{2}}{1 - x} dx - \int \frac{1 + \frac{\lambda}{2}}{1 + x} dx \\ &= (2 - \frac{\lambda}{2}) \int \frac{1}{1 - x} dx - (1 + \frac{\lambda}{2}) \int \frac{1}{1 + x} dx \\ &= -(2 - \frac{\lambda}{2}) \ln(1 - x) - (1 + \frac{\lambda}{2}) \ln(1 + x) \end{aligned}$$

Ainsi les solutions sont

$$\begin{aligned} S_{E_\lambda} &= \{x \mapsto \mu e^{(2-\frac{\lambda}{2})\ln(1-x)+(1+\frac{\lambda}{2})\ln(1+x)}, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \mapsto \mu(1-x)^{2-\lambda/2}(1+x)^{1+\lambda/2}, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

3. Il s'agit de déterminer les valeurs de λ telles que $\lambda/2 - 2 \in \mathbb{N}$ et $1 + \frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}$. Au vu des conditions, il faut que λ soit un entier pair ; la deuxième condition donne $\lambda \geq -2$, la première condition donne $\lambda \geq 4$. Ainsi les seuls candidats sont $-2, 0, 2, 4$. On vérifie que ça marche :

$$\begin{aligned} S_{E_{-2}} &= \{x \mapsto \mu(1-x)^3, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1-x)^3) \\ S_{E_0} &= \{x \mapsto \mu(1-x)^2(1+x), \mu \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1+x)(1-x)^2) \\ S_{E_2} &= \{x \mapsto \mu(1-x)(1+x)^2, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1+x)^2(1-x)) \\ S_{E_4} &= \{x \mapsto \mu(1+x)^3, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1+x)^3) \end{aligned}$$

4. L'équation homogène correspondant à cette équation est en fait (E_2). Ainsi

$$S_H = \{x \mapsto \mu(1-x)(1+x)^2, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Utilisons la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière. On va chercher y sous la forme $y(x) = \mu(x)(1-x)(1+x)^2 = \mu(x)(1 - x^2 + x - x^3)$. Alors

$$y'(x) = \mu'(x)(1-x)(1+x)^2 + \mu(x)(-3x^2 - 2x + 1)$$

On a

$$\begin{aligned} & y'(t) + \frac{3x-1}{1-x^2}y(x) = \frac{(1+x)^3}{1-x^2} \\ \Leftrightarrow & \mu'(x)(1-x)(1+x)^2 + \mu(x)(-3x^2-2x+1) + \frac{3x-1}{1-x^2}\mu(x)(1-x)(1+x)^2 = \frac{(1+x)^3}{1-x^2} \end{aligned}$$

On calcule [en fait, pas besoin, on sait que la dérivée de $(1-x)(1+x)^2$ vérifie la bonne équation...] :

$$\frac{3x-1}{1-x^2}(1-x)(1+x)^2 = (3x-1)(1+x) = 3x - 1 + 3x^2 - x = 3x^2 + 2x - 1$$

Ainsi on a bien une simplification, et

$$\begin{aligned} y'(t) + \frac{3x-1}{1-x^2}y(x) = \frac{(1+x)^2}{1-x^2} &\Leftrightarrow \mu'(x)(1-x)(1+x)^2 = \frac{(1+x)^3}{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow \mu'(x)(1-x) = \frac{1+x}{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow \mu'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \\ &\Leftrightarrow \mu(x) = \int \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \\ &\Leftrightarrow y(x) = (1+x)^2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$S_E = \{x \mapsto (\mu + (1+x)^2)(1-x)(1+x)^2, \mu \in \mathbb{R}\}$$

5. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a alors $P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$, et

$$\begin{aligned}
RP' + SP &= (1 - X^2)(a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2) + (1 + 3X)(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) \\
&= a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 - a_1X^2 - 2a_2X^3 - 3a_3X^4 \\
&\qquad + a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + 3a_0X + 3a_1X^2 + 3a_2X^3 + 3a_3X^4 \\
&= (a_2 + a_3)X^3 + (3a_3 + 2a_1 + a_2)X^2 + (2a_2 + a_1 + 3a_0)X + (a_1 + a_0) \in \mathbb{R}_3[X]
\end{aligned}$$

6. La question précédente montre que $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$; il ne reste plus qu'à montrer que c'est une application linéaire :
   — Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $f(P_1 + P_2) = R(P_1 + P_2)' + S(P_1 + P_2) = RP_1' + RP_2' + SP_1 + SP_2$ car la dérivée est linéaire, et on a $f(P_1 + P_2) = f(P_1) + f(P_2)$.
   — Soit $P_1 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P_1) = R(\lambda P_1)' + S(\lambda P_1) = \lambda f(P_1)$ car $(\lambda P_1)' = \lambda P_1'$.

   On a donc bien que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
7. On a

$$\begin{aligned}
f(1) &= R \times 0 + S \times 1 = S = 1 + 3X \\
f(X) &= R \times 1 + S \times X = 1 - X^2 + X + 3X^2 = 1 + X + 2X^2 \\
f(X^2) &= R \times 2X + S \times X^2 = 2X - 2X^3 + X^2 + 3X^3 = 2X + X^2 + X^3 \\
f(X^3) &= R \times 3X^2 + S \times X^3 = 3X^2 - 3X^4 + X^3 + 3X^4 = 3X^2 + X^3
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\operatorname{Mat}_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. On a

$$\begin{aligned}
g_\lambda \text{ injectif } &\Leftrightarrow \operatorname{Ker} g_\lambda = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\} \\
&\Leftrightarrow RP' + SP - \lambda P = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\
&\Leftrightarrow (1 - X^2)P' + (3X + 1 - \lambda)P = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\
&\Leftrightarrow P \text{ solution de } (E_\lambda) \Rightarrow P = 0 \qquad\qquad \Leftrightarrow \text{ aucun polynôme non-nul de degré}
\end{aligned}$$

   D'après la question 3, si $\lambda \in \{-2, 0, 2, 4\}$ on a des polynômes de degré 3 qui sont solution, et si $\lambda \notin \{-2, 0, 2, 4\}$ les solutions ne sont pas des polynômes. Ainsi

$$g_\lambda \text{ non injectif } \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 0, 2, 4\}$$

   On a de plus d'après la question 3

$$\begin{aligned}
\text{Pour } \lambda = -2 : &\ -(1 - x)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \in \operatorname{Ker}(g_{-2}) \\
\text{Pour } \lambda = 0 : &\ (1 - x)^2(1 + x) = x^3 - x^2 - x + 1 \in \operatorname{Ker}(g_0) \\
\text{Pour } \lambda = 2 : &\ -(1 - x)(1 + x)^2 = x^3 + x^2 - x + 1 \in \operatorname{Ker}(g_2) \\
\text{Pour } \lambda = 4 : &\ (1 + x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \in \operatorname{Ker}(g_4)
\end{aligned}$$

9. On nous demande ici de montrer que la famille

$$B' = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1, x^3 + 3x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 - x + 1, x^3 + x^2 - x + 1) = (P_1, P_2, P_3, P_4)$$

est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ et qu'on a 4 vecteurs dans B', il suffit de montrer que c'est une famille libre. On a

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\\ -3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 &= 0\\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 &= 0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\\ -3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\\ 6\lambda_2 - \lambda_3 &= 0\\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\\ -3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 0\\ \lambda_2 &= \lambda_3\\ \lambda_2 &= -\lambda_3 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 &= 0\\ -3\lambda_1 + \lambda_4 &= 0\\ \lambda_2 &= 0\\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_4\\ \lambda_4 = 3\lambda_1\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 = 0\\ \lambda_4 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi c'est une famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 : c'est une base.

10. On sait d'après la question 8 que

$$\begin{aligned}
g_{-2}(P_1) = 0 &\Rightarrow f(P_1) = -2P_1\\
g_0(P_2) = 0 &\Rightarrow f(P_2) = 0\\
g_2(P_3) = 0 &\Rightarrow f(P_3) = 2P_3\\
g_4(P_4) = 0 &\Rightarrow f(P_4) = 4P_4
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{B',B'}(g) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$