DS Bonus - Agro 2017 TB

Durée : 3h. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

On utilisera aussi dans cet exercice la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer le rang de f, et la dimension du noyau de f.
   b) Montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ forme une base du noyau de f.
   c) Déterminer un vecteur v tel que $f(v) = u$. On veillera à ce que la troisième coordonnée de v soit égale à -1.
   d) Soit $w = (0, 1, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. a) Vérifier que $f(w) = v$.
   b) Donner la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base (u, v, w).
   c) Donner la matrice P dont les colonnes sont les coordonnées de (u, v, w) dans la base canonique.
   d) Calculer l'inverse de P.
   e) Montrer que $P^{-1}AP = N$.
3. On calcule dans cette question les puissances successives de A.
   a) Calculer N^2 et N^3.
   b) Montrer que pour entier naturel $n \geq 3$, N^n est la matrice nulle.
   c) Déduire des questions qui précèdent la valeur de A^n pour tout entier naturel n.
4. Dans cette question on cherche à déterminer si il peut exister Q inversible tel que $Q^{-1}AQ$ est une matrice diagonale. On suppose que c'est le cas et on note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les coefficients non nuls de cette matrice diagonale.
   a) Montrer qu'on a alors nécessairement $\lambda_i^3 = 0$ pour tout i.
   b) Conclure.

Exercice de probabilités

Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle qu'une densité de X est la fonction

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

On définit une nouvelle variable aléatoire Y, en posant $Y = \exp(-X) = e^{-X}$. Le but de l'exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

1. Questions de cours

Dans tout l'exercice, on désigne par F_X la fonction de répartition de X, et par F_Y celle de Y. On tiendra pour acquis que $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ pour tout réel x positif.

1. Donner la valeur de $F_X(x)$ lorsque x est une réel strictement négatif.
2. Rappeler la valeur de $E(X) = \int_0^{+\infty} tf(t)dt$.
3. a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$.
   b) En utilisant la formule $E(g(X)) = \int_0^{+\infty} g(x)f(x)dx$, calculer l'espérance $E(Y)$.

2. Fonction de répartition de la variable aléatoire Y

Dans cette partie on se donne un réel a. Pour une variable aléatoire X de densité f on définit la *fonction de répartition de* X comme

$$F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$

1. Résoudre l'inéguation $e^{-x} \leq a$ (l'inconnue, x, étant un nombre réel). On distinguera deux cas : celui où a est strictement positif et celui où a est négatif.
2. On suppose dans cette question que $a > 0$.
   a) Montrer que $\mathbb{P}(Y \leq a) = \mathbb{P}(X \geq -\ln(a))$.
   b) Montrer que $F_Y(a) = 1 - F_X(-\ln(a))$.
   c) On suppose dans cette question que $a > 1$; donner alors le signe de $-\ln(a)$. En déduire l'expression de $F_Y(a)$.
   d) On suppose dans cette question que $a \in [0; 1]$, montrer qu'alors $F_Y(a) = a$.
3. Lorsque a est négatif, calculer $F_Y(a)$.
4. Tracer alors l'allure de la courbe représentative de F_Y.

3. Densité de la variable aléatoire Y

1. a) Montrer que la fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur les intervalles $]-\infty; 0[$, $]0; 1[$, $]1; +\infty[$.
   b) Calculer la dérivée de F_Y sur chacun de ces intervalles.
2. On admet que la variable aléatoire Y est à densité, et qu'une densité de Y est obtenue à l'aide de la dérivée de F_Y. Reconnaître la loi classique suivie par Y, et en donner les paramètres éventuels.

Exercice d'analyse

Dans tout cet exercice on se donner deux nombres réels a et k. On suppose $k > 0$.

Étude d'une fonction

On considère f la fonction de $]-\frac{a}{k};+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, définie pour tout $x > \frac{-a}{k}$ par $f(x) = \frac{1}{kx+a}$.

1. On admet que la fonction f est définie et dérivable sur $]\frac{-a}{k};+\infty[$. Donner la dérivée de f sur cet intervalle.
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-\frac{a}{k};+\infty[$.
3. Donner le tableau de variations de f sur $]\frac{-a}{k};+\infty[$. On fera apparaître les limites.
4. Soit $x > \frac{-a}{k}$; montrer que $f'(x) + kf(x)^2 = 0$.
5. Dans cette question on suppose que a et k sont strictement positifs.
   a) Montrer que 0 appartient à l'intervalle $]-\frac{a}{k};+\infty[$.
   b) Déterminer la valeur de a pour qu'on ait $f(0) = 1$.

Étude d'une équation différentielle

On se donne I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, tel que $[0;3] \subset I$. On rappelle que k est un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle :

$$y' + ky^2 = 0 \qquad\qquad (E)$$

On va s'intéresser uniquement aux solutions qui sont définies sur I. On admettra, et on pourra utiliser dans tout l'exercice, que si y est une solution non nulle de (E) définie sur l'intervalle I, alors y ne s'annule en aucun point de I.

1. Soit y une solution de (E), que l'on suppose définie sur I, et non nulle.
   a) Montrer que la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{y(x)}$ est bien définie sur I, dérivable sur I, et calculer sa dérivée en fonction de y et de y'.
   b) Montrer que pour tout $x \in I$, $u'(x) = k$.
   c) En déduire qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $y(x) = \frac{1}{kx+a}$.
2. On dispose de trois fonctions, y_1, y_2, y_3, que l'on suppose définies et dérivables sur l'intervalle I. On dispose de certaines valeurs numériques prises par les fonctions y_1, y_2, y_3, résumées dans le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$y_1(x)$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$
$y_2(x)$	9	5	3	2
$y_3(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	-1

   a) Montrer que y_1, y_2, y_3 sont continues sur I.
   b) Montrer que y_3 s'annule sur l'intervalle $[0;3]$. Expliquer alors pourquoi y_3 ne peut pas être solution de l'équation (E).
   c) Donner à partir du tableau ci-dessous un tableau de valeurs pour les fonctions $\frac{1}{y_1}$ et $\frac{1}{y_2}$. Expliquer alors pourquoi seule une de ces fonctions, y_1 ou y_2, peut être solution de l'équation (E) et préciser laquelle.
   d) En admettant que cette fonction soit bien solution de (E), quelles seraient les valeurs de a et k ? Donner alors l'expression de cette solution en fonction de x.

Exercice d'algèbre

1. a) On écrit

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 - 1 & \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

car il reste 2 pivots non nuls. Quant à la dimension du noyau de f, calculons $\operatorname{Ker} f$; commençons par écrire que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ x - z \\ 2x - y - z \end{pmatrix}$$

Ainsi $f(x, y, z) = (x - z, x - z, 2x - y - z)$. On a alors

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{(z, z, z), z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$; la dimension de $\operatorname{Ker} f$ est donc 1, car $((1, 1, 1))$ en est une base (générateur d'après ce qui précède, libre car c'est une famille à 1 vecteur non nul).

b) Ceci découle directement de la question précédente. [Il y a un théorème de 2e année qui permet de faire la question précédente plus simplement et cette question devient alors non triviale.]

c) On prend $v = (v_1, v_2, v_3)$, et on écrit

$$\begin{aligned}
f(v) = u &\Leftrightarrow f(v_1, v_2, v_3) = (1, 1, 1) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_3 = 1 \\ v_1 - v_3 = 1 \\ 2v_1 - v_2 - v_3 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_3 = 1 \\ 2v_1 - v_2 - v_3 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_3 = 1 \\ -v_2 + v_3 = -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 1 + v_3 \\ v_2 = 1 + v_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a donc une infinité de solutions ; or l'énoncé nous demande à ce que $v_3 = -1$, ce qui donne donc $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = -1$. Ainsi $v = (0, 0, -1)$.

d) La famille (u, v, w) est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$; ainsi il suffit de montrer qu'elle est libre, ou génératrice. Calculons son rang, et montrons qu'il est égal à 3 :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(u, v, w) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1\\
&= 3
\end{aligned}$$

Ainsi le rang est égal à la dimension de l'espace, la famille est donc génératrice donc une base. [Ou la matrice est inversible, ou le rang est égal au nombre de vecteurs...]

2. a) On calcule

$$f(0, 1, 0) = (0 - 0, 0 - 0, 2 \times 0 - 1 - 0) = (0, 0, -1) = v$$

b) Par définition, c'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de u, v et w dans la base $B' = (u, v, w)$. On a

$$\begin{aligned}
f(u) &= (1 - 0 - 1, 1 - 0 - 1, 2 - 1 - 1) = (0, 0, 0) = 0 \times u + 0 \times v + 0 \times w\\
f(v) &= 1 \times u + 0 \times v + 0 \times w\\
f(w) &= 0 \times u + 1 \times v + 0 \times w
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Mat}_{B',B'}(f) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ (on retrouve la matrice N du début).

c) C'est facile : $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

d) On forme le système $PX = Y$ et on essaie d'exprimer les X en fonction des Y, pour obtenir $X = P^{-1}Y$ et donc P^{-1} :

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1\\ x_1 + x_3 = y_2\\ x_1 - x_2 = y_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1\\ x_3 = y_2 - y_1\\ x_2 = y_1 - y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} Y$$

On peut vérifier :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et ça doit marcher dans l'autre sens normalement.

e) On a

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N
\end{aligned}
$$

3. a) On part de la définition de N :

$$
\begin{aligned}
N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
N^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) On peut le montrer par récurrence :

— Initialisation : ce qui précède montre que $N^3 = 0$ (où le 0 est ici le zéro de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la matrice nulle).

— Hérédité : supposons que $N^n = 0$ et montrons que $N^{n+1} = 0$. On a $N^{n+1} = N^n \times N = 0 \times N = 0$.

La propriété est démontrée par récurrence.

c) On connaît A^0 (c'est I_3 par définition) et A. Calculons A^2 ; on sait que $P^{-1}AP = N$, donc $A = PNP^{-1}$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
A^2 &= (PNP^{-1})(PNP^{-1}) \\
&= PN^2P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(On aurait pu aussi calculer A^2 à partir de la définition de A, après tout...) En ce qui concerne A^3 :

$$A^3 = PN^2P^{-1} \times PNP = PN^3P^{-1} = P \times 0 \times P^{-1} = 0$$

Si $A^3 = 0$, alors $A^n = 0$ pour $n \geq 3$ par la même démonstration qu'à la question précédente.

4. a) Si on note D la matrice diagonale, on a $D = Q^{-1}AQ$, et

$$D^3 = Q^{-1}AQQ^{-1}AQQ^{-1}AQ = Q^{-1}A^3Q = 0$$

Or

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est nulle si et seulement si les λ_i sont tous nuls.

b) Si Q existe, on a $Q^{-1}AQ = 0$, puis comme Q est inversible $Q^{-1}A = 0$ et $A = 0$; or A n'est pas la matrice nulle, donc c'est absurde.

Exercice de probabilités

Questions de cours

1. La définition de la fonction de répartition dans ce cas est $\int_0^x f(t)dt$; si $x < 0$ on intègre sur les négatifs, et f est nulle sur les négatifs, donc l'intégrale est nulle : $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$.
2. Ici on peut réaliser une intégration par parties :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} te^{-t}dt \\ &= [-te^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}dt \\ &= 0 - 0 + [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

3. a) Avec un déguisement on reconnaît $u'e^u$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-2t}dt &= \int_0^{+\infty} \frac{-1}{2} \times -2 \times e^{-2t}dt \\ &= \frac{-1}{2}[e^{-2t}]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) On a $Y = \exp(-X) = g(X)$ avec $g : x \mapsto \exp(-x)$. On a alors d'après la formule donnée

$$E(Y) = \int_0^{+} \infty g(x)f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-x}dx = \frac{1}{2}$$

2. Fonction de répartition de la variable aléatoire Y

1. On voudrait passer au ln des deux côtés, mais ça n'a de sens que si $\ln a$ existe. Donc :
   — Si $a > 0$, par croissance de ln on a
   $$e^{-x} \leq a \Leftrightarrow -x \leq \ln(a) \Leftrightarrow x \geq -\ln(a)$$
   — Si $a \leq 0$, on aurait $e^{-x} \leq 0$, ce qui est absurde.
2. a) On a
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq a) &= \mathbb{P}(e^{-X} \leq a) \\ &= \mathbb{P}(X \geq -\ln(a))\end{aligned}$$
   car les évènements "$e^{-X} \leq a$" et "$X \geq -\ln a$" sont les mêmes car $a > 0$.

   b) Par définition $F_Y(a) = \mathbb{P}(Y \leq a)$. Il faut maintenant transformer le membre droit : on sait que "$X \geq -\ln(a)$" et "$X \leq -\ln(a)$" sont complémentaires (système complet d'évènements) donc
   $$\begin{aligned}F_Y(a) &= \mathbb{P}(Y \leq a) \\ &= \mathbb{P}(X \geq -\ln(a)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq -\ln(a)) \\ &= 1 - F_X(-\ln(a))\end{aligned}$$

   c) Si $a > 1$, $\ln(a)$ est positif et donc $-\ln(a) \leq 0$. Ainsi
   $$F_X(-\ln(a)) = \int_{-\infty}^{-\ln(a)} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\ln(a)} 0dx = 0$$
   On a alors $F_Y(a) = 1 - 0 = 1$.

   d) Si $a < 1$, $-\ln(a) > 0$. Par la relation de Chasles on a alors
   $$\begin{aligned}F_X(-\ln(a)) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{-\ln(a)} f(t)dt \\ &= \int_{0}^{-\ln(a)} e^{-t}dt \\ &= [-e^{-t}]_0^{-\ln(a)} = -e^{-(-\ln(a))} - (-1) = 1 - a\end{aligned}$$
   D'après la question 2)b) on a alors
   $$F_Y(a) = 1 - F_X(-\ln(a)) = 1 - (1 - a) = a$$
3. On a $F_Y(a) = \mathbb{P}(Y \leq a) = \mathbb{P}(e^{-X} \leq a)$: si $a \leq 0$ cette probabilité est nulle car $e^{-X} \geq 0$.
4. F_Y est nulle sur $]-\infty; 0]$, égale à a sur $[0; 1]$, et constante égale à 1 sur $[1; +\infty[$.

3. Densité de la variable aléatoire Y

1. a) On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x = 0\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} 0 = 0\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} x = 1\\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} 0 = 1\end{aligned}$$

   Ainsi la fonction est continue en 0 et en 1 ; elle est aussi continue (car constante ou affine) sur les autres intervalles. Sur $]-\infty;0[$, $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ elle est constante ou affine, donc elle est dérivable sur ces intervalles.

   b) On a

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty;0[\\ 1 & \text{si } x \in]0;1[\\ 0 & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

2. La densité est constante égale à 1 sur $]0;1[$ et nulle partout ailleurs : Y est donc une loi uniforme sur $[0;1]$.

Exercice d'analyse

Étude d'une fonction

1. On a $f(x) = (kx+a)^{-1}$ donc

$$f'(x) = k \times -1 \times (kx+a)^{-2} = \frac{-k}{(kx+a)^2}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (kx+a)^2 &= +\infty \qquad \text{car } k \neq 0\\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 0\\ \lim_{x\to \frac{-a}{k}^+} (kx+a)^2 &= 0^+\\ \lim_{x\to \frac{-a}{k}^+} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

3. On a $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -k \geq 0$, ce qui est impossible car $k > 0$. Ainsi $f'(x) \leq 0$ et la fonction est décroissante. On fait alors un tableau de variations qui part de 0 et qui décroît vers $-\infty$.
4. Il suffit de remplacer :

$$f'(x) + kf(x)^2 = \frac{-k}{(kx+a)^2} + k\frac{1}{(kx+a)^2} = 0$$

5. a) Si $a > 0$ et $k > 0$, alors $\frac{a}{k} > 0$ et $\frac{-a}{k} < 0$; par définition de l'intervalle $]-\frac{a}{k};+\infty[$ (l'ensemble des réels strictement supérieurs à $\frac{-a}{k}$), 0 est bien dans cet intervalle.

   b) On a

$$f(0) = \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

Étude d'une équation différentielle

1. a) La fonction $u(x) = \frac{1}{y(x)}$ est définie partout où $y(x) \neq 0$; or comme on a supposé que y ne s'annule pas sur I, u est définie sur I. De plus, u est dérivable sur I car définie sur I et quotient de fonctions dérivables sur I. On a

$$u'(x) = (y(x))^{-1} = \frac{-y'(x)}{y(x)^2}$$

   b) Comme y est solution de l'équation différentielle, on a $y' = -ky^2$; ainsi :

$$u'(x) = \frac{-(-ky(x)^2)}{y(x)^2} = k$$

   c) Comme $u'(x) = k$, $u(x) = \int kdx = kx+a$ avec a une constante. Ainsi $y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{kx+a}$.

2. Ces trois fonctions sont supposées dérivables, donc elles sont continues.
3. On a $y_3(1) > 0$, $y_3(2) < 0$ et y_3 est continue ; par le théorème des valeurs intermédiaires, y_3 s'annule sur l'intervalle $]1;2[$, donc sur $[0;3]$. Comme toutes les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto \frac{1}{kx+a}$, qui est une fonction qui ne peut pas s'annuler, y_3 ne peut pas être solution de (E).
4. On a

x	0	1	2	3
$\frac{1}{y_1(x)}$	1	3	5	7
$\frac{1}{y_2(x)}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Pour qu'une fonction soit solution de (E), il faut que la dérivée de $\frac{1}{y}$ soit constante, c'est-à-dire que $\frac{1}{y}$ soit une fonction affine. Au vu des valeurs données, ça n'est pas le cas de y_2 : sinon on aurait $\frac{1}{y_2(x)} = ax+b$, et $\frac{1}{y_2(1)} - \frac{1}{y_2(0)} = a = \frac{4}{45}$ et $\frac{1}{y_2(2)} - \frac{1}{y_1(1)} = a = \frac{2}{15} = \frac{6}{45}$. C'est peut-être le cas de $\frac{1}{y_1}$, qui ressemble à $x \mapsto 2x+1$.

5. On aurait $k = 2$ et $a = 1$, et $y_1(x) = \frac{1}{2x+1}$.